



الفلسفة والممار

فلسفة الرياضة

5

د. محمد ثابت الفندى



المكتبة العامة
للقصور الملكية



Bibliotheca Alexandrina



فلسفة الرياضة

د. محمد ثابت الفندی

تقديم

د. علي عبد المعطي

• تصنيف الكتاب : **عالم جنان**
 • شعار المنظمة : **تفصيل من لوحة رفائيل "مدرسة الحكمة"**

باسم مدير التحرير على العنوان التالي :
 ١١٦ ش أمين سامي - القصر الصيفي
 القاهرة - رقم بريد ١١٥٦١

الرسائل

الفلسفة والعلوم

سلسلة

تعنى بنشر الكتابات
الفلسفية والعلمية

الهيئة العامة لقصور الثقافة

رئيس مجلس الإدارة

ورئيس التحرير

د. فوزى فهمى

المشرف العام

رئيس التحرير التنفيذى

د. يوسف زيدان

على أبوشادى

مدير التحرير

نائب رئيس التحرير

محمد أبو الجد

محمد كشيك

تصدير

هناك الكثير من القيم (المطمورة) فى واقعنا المعاصر.. فقد تطمر قيمة ما، لتجاهلنا وانعدام عنايتنا بتفحص ما يمتلىء به واقعنا الزاخر.. وقد يأتى (الطمر) متعمداً، فكثيراً ما يلتف جدار من الصمت المتعمد حول قضية ما، أو شخص ما. وقد تطمر بعض القيم، فى غمرة اندفاعنا اليومي المتهوس، المقترن بتدفق إعلامى أكثر تهوساً؛ مما لا يدع لنا المجال لوقفه تأمل أو لحظة تدبر.. وهكذا؛ تعددت الأسباب، والطمر واحد.

وقد كان اختيارنا لكتاب (فلسفة الرياضة) ليصدر ضمن كتب هذه السلسلة واسعة الانتشار.. محاولة لنفض التراب عن قيمة مهمة فى واقعنا المعاصر، كادت تطمرها الأسباب والعلل سالفة الذكر؛ تلك القيمة، هى شخصية الدكتور محمد ثابت الفندى، وكتابه الرائد .

عرفت المرحوم الدكتور ثابت الفندى، فى مطلع التسعينيات، وكان

هو على وشك الدخول فى التسعينيات من عمره! وقد كنت قبلها أظنه قد توفى من زمن.. حملنى ساعتها أحد أساتذتى، رسالة إلى الدكتور الفندى؛ فتعجبت متسائلا : ألم يمّت منذ سنوات؟! ضحك الأستاذ وأخبرنى بأن عالمنا الجيل حىٌ يرزق، بيد أنه معتكف بمنزله منذ سنوات .

كان المنزل / الخلوة، قريبا جدا من كلية الآداب. وصلت بعد دقيقتين فاستقبلنى الدكتور/ المتوحد، مستبشرا باشأ . وامتد اللقاء الأول لساعتين - وتعددت من بعده اللقاءات - وراح يحدثنى عن دقائق التصوف ورقائق شئون الأولياء.. وفى غمرة الانهماك والتطواف بتلك الدقائق والرقائق، ابتدرته بسؤال وقع منه موقعا :
أليس تخصص سيادتك فى فلسفة العلم؟!

قال الدكتور الفندى : التصوف يا بنى، هو حياة القلب والروح.. وللعقل شئون أخر، ومن تلك الشئون؛ الفلسفة والعلم.. هذا عالم، وذاك عالم آخر. والعالم، يا بنى ، يلتقى عنده العالمان.

فى لقاء تالٍ حدثنى الدكتور الفندى عن اعتزازه بكتابه (فلسفة الرياضة) قال ما معناه، إنه حين وضع هذا الكتاب فى اللغة العربية، لم تكن الثقافة العربية على امتداد رقعتها تعلم شيئا من فلسفة العلوم، وصار الكتاب مرجعا علميا فى أوروبا، ولم تنتبه إليه الجامعات

والجامعات العربية إلا بعد ذلك بسنوات طويلة .

ولم يكن الكتاب آنذاك متيسرا، وكان الحصول على نسخة منه:
بتعبير تراثى قديم : أعز من الكبريت الأحمر؛ وكان رحمه الله يتمنى
أن يرى طبعة واسعة الانتشار من هذا الكتاب الرائد.. وها هي
الطبعة تصدر، ولكن بعد وفاته بسنوات.

وقد رأيت أن يقدم الكتاب، أحد تلامذة المرحوم الدكتور محمد
ثابت الفندى، فاستجاب لذلك مشكورا (الدكتور على عبد المعطى)
وهو من الجيل الثانى فى سلسلة الأجيال التى تخرجت علميا على يد
المرحوم الدكتور ثابت الفندى بجامعة الإسكندرية.. وكتب الدكتور
على عبد المعطى هذه المقالة المطولة، لتكون بمثابة «إزاحة الستار»
عن شخصية عالمنا الجليل. ومن بعد ذلك يأتى نص الكتاب، فى هذه
الطبعة التى تصدر بعد قرابة نصف قرن من أول إصدار لكتاب
فلسفة الرياضة .

د. يوسف زيدان

ثابت الفندى

(مسيرة حياة وفكر)

د. على عبد المعطى

ولاد الدكتور محمد ثابت الفندى بأبى تيج من أعمال محافظة
أسيوط فى ١٤ أغسطس عام ١٩٠٨، وبعد أن تدرج فى سلم التعليم
فى بلدته سافر إلى القاهرة حيث حصل من جامعتها على الليسانس
فى الآداب تخصص الفلسفة عام ١٩٣١، وعلى درجة الماجستير فى
الفلسفة ١٩٣٢، ثم سافر مبعوثا إلى باريس حيث حصل هناك على
درجة الليسانس فى الآداب عام ١٩٣٧ فديبلوم الدراسات العليا عام
١٩٣٨ فدرجة دكتوراه فى الفلسفة من السربون بمرتبة الشرف
الممتازة عام ١٩٤٥ وذلك بعد أن تقدم برسالتين، الأولى حول الأسس
الفلسفية والمنطقية فى العلوم الرياضية، والثانية حول القضايا
الموجهة فى البحوث المنطقية المعاصرة .

عاد ثابت الفندى إلى جامعة الاسكندرية، حيث عين فى وظيفة
«مدرس أ» فى الدرجة الرابعة فى عام ١٩٤٥ ورقى إلى وظيفة
«أستاذ مساعد ب» فى الدرجة الثالثة عام ١٩٤٨، وإلى وظيفة
«أستاذ مساعد أ» فى الدرجة الثانية عام ١٩٥٠، وقد اقترح مجلس
الكلية بجلسته المنعقدة فى ٢٣ يناير عام ١٩٥١ تشكيل لجنة علمية
فى استحقاقه لدرجة الأستاذية مكونة من الدكتور أبو العلا بك
عفيفى رئيس قسم الفلسفة بجامعة الاسكندرية آنذاك، والأستاذ
إبراهيم اللبان عميد كلية دار العلوم وأستاذ الفلسفة بها والأستاذ

الدكتور إبراهيم بيومى مذكور عضو مجلس الشيوخ فى تلك الأونة، وانتهى التقرير إلى أنه جدير بالترقية إلى وظيفة الأستاذية باعتباره الأستاذ المصرى الوحيد المتخصص فى المنطق الرياضى وتمت ترقيته عام ١٩٥٢ .

عين بعد ذلك رئيسا لقسم الفلسفة فعميدا لكلية الآداب فى الفترة من عام ١٩٦١ - ١٩٦٥ وفى أثناء ذلك شغل منصب ممثل الحكومة المصرية فى اليونسكو عام ١٩٤٧ ثم ممثلا لليونسكو فى الأمم المتحدة عام ١٩٤٨، وعضوا باللجنة التحضيرية للميثاق الوطنى فى عام ١٩٦١، وعضو المجلس الأعلى للآداب والعلوم الاجتماعية، ورئيس هيئة الآداب والفنون والعلوم الاجتماعية فى الإسكندرية ما بين عامى ١٩٦١ - ١٩٦٥ .

وفى عام ١٩٦٦ سافر الدكتور **ثابت الفندى** إلى بيروت حيث عين هناك عميدا لكلية الآداب حتى عام ١٩٨٤، وعين بعد ذلك أستاذا متفرغا بقسم الفلسفة بكلية الآداب جامعة الإسكندرية حتى وفاته، كما اختير عضوا لمجلس الكلية لأعوام عديدة متصلة .

وقد قدم الدكتور **محمد ثابت الفندى** إلى المكتبة العربية عددا من المؤلفات المتنوعة أهمها :

* كتاب الطبقات الاجتماعية (مطبوع باللغة العربية) مصر -

مارس ١٩٤٩ .

* المفكرون الكلاسيكيون العرب (بحث بالفرنسية نشر فى مجلة

اليونسكو) - ديسمبر ١٩٤٨ .

* الفولكلور فى ضوء علم الاجتماع (بحث بالعربية قبل للنشر

بمجلة الكلية) سنة ١٩٥٢.

* وثيقة عن حقوق الإنسان (باللغتين الإنجليزية والفرنسية، نشر

فى مجلة اليونسكو) عام ١٩٤٨.

* وثيقة عن الديمقراطية ومعانيها عند مفكرى الأمم المختلفة

قديمًا وحديثًا، ونشر فى مجلة اليونسكو عام ١٩٤٨.

* أصول المنطق الرياضى (دار المعرفة الجامعية) عام ١٩٩٠.

* مناهج البحث العلمى : محاضرات (نشرت ببيروت) عام

١٩٨٠.

* تحقيق لكتاب قوى النفس الناطقة وأحوالها لابن سينا.

* كما شارك مع زميليه إبراهيم زكى خورشيد وأحمد الشينتاوى

فى ترجمة دائرة المعارف الإسلامية .

* فلسفة الدين عند الغزالى .

* فلسفة الرياضة .

كان الدكتور ثابت الفندى أول من شارك فى تأييد ثورة ١٩٥٢،

فوقع أول برقية تأييد مع أستاذين آخرين باسم جامعة الاسكندرية إلى مجلس قيادة الثورة، وذلك في وقت كان من المحال فيه معرفة مصير الثورة ومصير رجالها، لقد كان يشعر شعورا داخليا صادقا بأن الظلم لا يمكن أن يستمر، وأن الفساد لا يمكن أن يبقى، فراح يعلن تأييده المطلق للثورة باعتبارها بطلا منتظرا سوف تتحقق آمال المواطنين على يديه .

لم يعرف **ثابت الفندى** التسلط أو التعسف في استخدام السلطة مع أن سلطة العميد آنذاك كانت شبه مطلقة، لقد كان على العكس من ذلك، يعامل الآخرين كغايات لا كوسائل على نهج الفيلسوف كانط.

بيد أنه في فترة من فترات حياته، دخل محراب التصوف فترك المنطق، وهاجر فلسفة العلوم متطلعا إلى معرفة أسمى وإلى نوع فريد من الإدراك، يعتمد على التذوق الوجداني، وهوما سنوضحه في السطور التالية من تطور في حياته الفكرية .

بدأ **ثابت الفندى** الشاب حياته الجامعية الأولى وهو منغمس انغماسا شديدا في مجالى فلسفة العلوم والمنطق الرياضى. وكان يرى في هذين المجالين دقة فائقة، وأحكاما يستحيل أن تصل إليه فروع الفلسفة الأخرى. فانكب على هذين الفرعين وأنتج فيها نتاجا

طيباً مثمراً حتى أنه أصبح أول من كتب باللغة العربية في مصر
والبلاد العربية فى هذا الإطار.

وفى هذا الصدد صدر للدكتور **ثابت الفندى** كتابه الفائق الدقة
عن فلسفة الرياضة، وعن هذا الكتاب يقول «انه فيما أعلم أول دراسة
بالعربية فى موضوع جليل شغل الفكر الغربى طويلا وما زال يشغله
وهو موضوع (أسس الرياضة) على حد اصطلاح الرياضيين، أو
فلسفة الرياضة كما اصطلاح الفلاسفة والمتفلسفون من الرياضيين».

بدأ ثابت الفندى كتابه «فلسفة الرياضة» بالتمهيد لفلسفة العلوم،
والحديث عن موضوعات الرياضة ونشأتها ومنهجها، ثم انتقل إلى
حركة النقد الذاتى فى الهندسة وما نجم عنها من ظهور الهندسيات
اللاإقليدية، وما ترتب على ذلك من ظهور «الأكسيوماتيكي» أى حركة
تأسيس المسلمات الهندسية والتي تبتعد تماما عن الحدث المكانى،
عارضاً بعد ذلك للجبر والهندسة التحليلية مبيناً دور الأعداد التخيلية
فى تجسيب الرياضة وإمكانية ردها إلى الأعداد الصحيحة ~~نوباتى~~
الفصل الأخير من هذا الكتاب لكى يعرض فيه أهم المذاهب
المعاصرة التي تناولت أسس الرياضة كالمذهب اللوجستيقي ونظرية
حساب القضايا الأولية. واشتقاق العدد أو نظرية الحساب من ثوابت
المنطق، والمذهب الاكسيوماتيكي، والمذهب الحدسي، وقد جاء كل ذلك

بعبارات محددة، وكلمات دقيقة.

ويأتى كتاب **ثابت الفندى** «أصول المنطق الرياضى» امتدادا لهذا الاتجاه المتعمق فى الرياضيات والمنطق، وهو يعد أيضا أول مؤلف بالعربية فى علم المنطق الرياضى المعاصر المسمى «لوجستيقا».

وهو يعرض فى الفصل الأول فى كتابه القيم هذا لأهمية المنطق فى الفلسفة وانقسامه إلى صورى ومادى، منتهيا، إلى أن دراسة المنطق الصورى فى صورته الرياضية إنما تكون عن طريقين:

الطريق الأول : ويبدأ بالرياضة البحتة، تطورها ونقد أصحابها لأسسها ومبادئها التقليدية واصطناعهم لطرق جديدة لتأسيس علمهم فتأدى من ذلك إلى المنطق الجديد، وهذا هو طريق الرياضيين، وفيه مشقة على الفيلسوف.

أما الطريق الآخر فهو طريق الفيلسوف ويبدأ من الفلسفة ذاتها خاصة من تاريخ المنطق الصورى، فيبين كيف أنه نشأت فيه عبر القرون عند فلاسفة كثيرين نزعات هامة هى من أخص خصائص اللوجستيقا المعاصرة، جعلته يتحول شيئا فشيئا إلى علم رياضى رصين .

ويقارن الدكتور **الفندى** فى الفصل الثانى بين منطق الفلاسفة وبين اللوجستيقا مؤكدا أن الاختلاف قائم بينهما من ناحية الموضوع

والمنهج والغرض، فموضوع المنطق الصورى هو صور الاستنباط
ومن ثم صور القضايا التى تتألف الاستنباطات منها.

ويذكر أن المنطق يجب أن يستعمل الرمز كمنهج لكي يصبح
حسابا كأخته الرياضه، كما يجب أن يكون نسقا استنباطيا لكي
يبرهن بالاستنباط قضاياها أو قوانينه .

ويعالج الدكتور الفندى فى الفصل الثالث وعنوانه «المنطق وعلم
النفس» حقيقة الصلة بين المنطق وعلم النفس وينتهى بعد دراسة
وتحليل عميقين لأواصر تلك الصلة إلى خاصية هامة جدا من
خصائص اللوجستيقا تكمن فى أنه علم عار بالمره من نزعة
السيكولوجية وعبوبها لأنه لا يفترض أدنى معرفة سيكولوجية أو حتى
مجرد افتراض وجود عقل أو إنسان .

ويميز بين العلمين : المنطق وعلم النفس على النحو التالى :
المنطق شىء مجرد وصورى، بينما ينصب علم النفس على شىء
مشخص، فالحياة الفكرية بحذافيرها وفى وجودها المشخص هى
موضوع الحلم لعلم النفس، فإذا ما جردناها عن محتوياتها فنحن
فى مجال المنطق .

وكما أكد المنطق الرياضى استقلاله عن علم النفس، فإنه يؤكد
استقلاله عن الفلسفة أيضا، وهذه خاصية من خواصه المميزة له،

وتلك النقطة يبحثها الدكتور **الفندى** فى الفصل الرابع الخاص بالمنطق والميتافيزيقا إذ يقرر أن المنطق الرياضى لا يمكن أن يعتبر مستقلا عن الميتافيزيقا، شأنه شأن المنطق دائما لا غنى له عن أرضية ميتافيزيقية يستند إليها مهما كان الأمر .

ويدلل الدكتور **الفندى** على تلك الصلة الوثيقة بين المنطق والفلسفة على النحو التالى :

١- لا يمكن إقامة منطق صورى حتى فى شكله الرياضى إلا على أساس من النظرات والأفكار الميتافيزيقية.

٢- إن المنطق فى أية صورة له، رياضيا كان أم غير رياضى، هو جوهر الفلسفة ولا سبيل إلى التفلسف بدون منطق.

ويؤكد الدكتور **الفندى** - على عكس اللوجستيين - أن هناك تأثيرا متبادلا لا مناص فيه بين المنطق والميتافيزيقا وهذا هو الذى نوع الفلسفات ونوع المنطق أيضا، فهناك أنواع عديدة من المنطق غير الصورى وغير الرياضى عرفت الفلسفات المتلاحقة وعبرت بها عن مدى احتجاجاتها المستمرة على المنطق الصورى الأرسطى الذى استأثر وحده باهتمام الفلسفة عبر التاريخ.

وفى الفصل الخامس يعرض **الفندى** للمذاهب التى أقامت الصلة بين المنطق والرياضة وهى : مذهب التشابه الظاهرى ومذهب جبر

المنطق، والمذهب اللوجستيقي والمذهب الأكسيوماتيكي والمذهب الحدسي الجديد .

ثم ينتقل في الفصل السادس للحديث عن اللوجستيقا، أقسامه وتعريفه ورموزه، كالثوابت والمتغيرات ويتناول في الفصل السابع خصائص اللوجستيقا وهي إمكانية تكوينه على هيئة نسق استنباطي من حيث أن اللوجستيقا بمثابة نظرية حسابية لقوانين الاستنباط .

أما الفصل الثامن فيعرض فيه الاستعراض الفلسفي للمنطق راسل، ذلك أن الأبحاث المنطقية قد تطورت كثيرا منذ كتابات راسل وستظل أبحاثه نقطة البداية التي لا غنى عنها والأساس الكلاسيكي لكل الأبحاث اللاحقة .

ولقد جدول راسل الاستعراض الفلسفي للمنطق الرياضي في مؤلفه : Principles of Mathematics أما الاستعراض الرياضي للمنطق فقد تناوله في كتابه الذي ألفه بالاشتراك مع هوايتهد وهو أصول الرياضه Principia Mathematica .

ويعرض **الفندي** في الفصل التاسع لنظرية حساب القضايا الابتدائية باعتبارها نقطة البدء في اللوجستيقا بدلا من التصورات التي يبدأ منها المنطق التقليدي ثم يعرض لحساب القضايا الابتدائية في صورته الرياضية كنسق استنباطي .

ويشرح فى الفصل العاشر طريقة الجداول فى حساب القضايا الابتدائية، أما الفصل الحادى عشر فيعرض فيه للمنطق الكثير من القيم طبقا عليه طريقة الجداول .

وفى مرحلة ثانية من حياة ثابت **الفندى** الفكرية نجده يحاول الفكك من الدائرة الأولى التى اهتم فيها اهتماما كبيرا بعلوم المنطق والرياضة أو بالعلوم المضبوطة لكى يجد نفسه فى محراب الدائرة الثانية التى هاجم فيها ما أسماه باللافلسفة حيناً وبمرض الفلسفة أحياناً ثانية. وتحتوى قائمة اللافلسفة عنده على السفسطة وفلسفة الشك المطلق والنزعات المادية والوضعية المنطقية وفلسفة التحليل وعلى كل اتجاه يحاول القضاء على الميتافيزيقا التى تمثل لديه قلب الفلسفة النابض، ووجدانها الثرى بالإيقاعات، وهى تتجدد دوما تجاه ما هو مفارق.

يقول ثابت **الفندى** «إن كلمة الميتافيزيقا.. تدل على ذلك الجزء التقليدى من الفلسفة الذى يتناول مسائل الوجود المطلق (الانتولوجيا) والوجود الواجب (الإلهيات) والوجود الممكن (العالم) ووجود الروح أو النفس وخلودها لذلك فهى كلمة تشرئب لها الأعناق عند سماعها، وتثير كوامن المشاعر المختلفة التى قلما تشف عن شئ آخر غير الظمأ الشديد إلى معرفة أكثر مما نملك وأبعد مما

لدينا بكل الطرق الأخرى وعلى رأسها العلم» .

ويرى **الفندي** أن الميتافيزيقا بهذا المعنى قد تم رفضها ومحاربتها بواسطة تيارين كبيرين أحدهما التيار المادى الذى يجتث بواعى قيام الميتافيزيقا من أساسها باجتناث تعدد درجات الوجود وقصرها على الوجود المادى وحده، وبذلك لا يكون هناك كلام عن الروح أو عن الألوهة، وهذا التيار المادى يقابله الاتجاه الروحى Spritualism المميز للميتافيزيقا، أما التيار الثانى والأهم والأوضح صلة بنظرية المعرفة فهو التيار الذى وقع تحت تأثير منهج العلوم أو بصفة أعم الذى تمسك بالتجربة الحسية كمصدر وحيد للمعرفة وبذلك ينكر على الميتافيزيقا أن تكون معرفة لأن موضوعاتها لا يمكن أن تقع تحت طائلة التجربة الحسية، وهذا التيار اتخذ لنفسه أسماء عديدة تختلف باختلاف أصحابها كالوضعية الجديدة والوضعية المنطقية وفلسفة اللغة وفلسفة التحليل .

تقوم الفلسفة المادية على قضية أساسية مؤداها أنه لا توجد إلا المادة وتغيراتها أو المادة والحركة، وهذه التغيرات وتلك الحركات ماهى إلا كيفيات تتصل بالمادة أكبر اتصال، وهو يضع قائمة عرضة لتلك الفلسفات المادية التى تنكر النفس والروح والألوهة وتقتصر على ما هو مادى وحسب، تبدأ هذه القائمة بفلسفات **ديموقريطس**

وأنبانيوقليس وأبيقور فى الفلسفة القديمة، وبفلسفات جاسندى وهوبز مع بدايات الفكر الفلسفى الحديث ويضم إليها مدرسة بافلوف Pavlov ويشتريف Pechterev التى اعتبرت الإنسان كالحيوان مجرد آلة تقوم برود فعل منعكسة مع المثيرات الخارجية بطريقة آلية محضة، كما نجد فى قائمة الماديين فيبر Weber وفشتر Fechner وهما قد ردا الحياة النفسية للإنسان فى ضوء المؤثرات الطبيعية على الأعضاء، كما نجد المدرسة السلوكية عند واطسن وفرويد وغيرهما من علماء النفس الذين يدرسون «النفس من غير نفس» على حد تعبير هفدنج .

وتضم قائمة الماديين كارل ماركس وإنجلز وغيرهما من أصحاب نظرية المادية الجدلية والمادية التاريخية. فيقول ماركس فى كتابه رأس المال «يرى هيغل أن حركة الفكر ، هذه الحركة التى يشخصها ويطلق عليها اسم الفكرة هى الإله (الخالق، الصانع) للواقع. أما أنا فأرى العكس، إن حركة الفكر ليست إلا انعكاسا لحركة المادة منقولة إلى دماغ الإنسان ومتحولة فيه .

ويقول إنجلز «إن وحدة العالم ليست فى كيانه، بل فى ماديته. ولا يوجد قط، ولا يمكن أن يوجد أبدا فى أى مكان، مادة بدون حركة، ولا حركة بدون مادة» .

وتقوم المادية الجدلية عند ماركس على قوانين ثلاثة هي :

١- قانون وحدة الأضداد وصراعها : كل شيء طبيعي، وكل ظاهرة تشتمل على طرفى تضاد، ولا يمكن أن يظل هذان الطرفان فى سلام، فمن المحتم أن يتولد الصراع بينهما، وهذا الصراع لا يقضى على وحدة الشيء أو الظاهرة، بل يفضى إلى تغلب الطرف المعبر عن التقدم على الطرف الآخر فيحدث التحول، وهذا هو السبيل إلى التطور. ويرى ماركس أننا نجد فى الشيء الواحد الحار والبارد الصلبة، والليونة الحياة والموت، اليقظة والنوم، الأنانية والغيرية، وأن التحول يحدث حينما يتغلب طرف على الآخر دون القضاء على وحدة الشيء. وبالتطبيق على الواقع السياسى نجد أن المجتمع الرأسمالى يشتمل على البروليتاريا والبرجوازية، وكل طبقة منهما تفترض وجود الطبقة الأخرى على الرغم من تضادهما إذ أنهما يؤلفان وحدة النظام الرأسمالى .

٢- قانون الانتقال من التغير الكمى إلى التغير الكيفى الذى يوضح كيف يسير التطور، فالتغير الكمى يحدث من ناحية المقدار، أما التغير الكيفى فيحدث من التحول فى الكيف أو الصفات، ويرى ماركس أنه عندما تتراكم التغيرات الكمية وتتزايد فإن التغير الكيفى لا يلبث أن يتم. كما يرى أنه إذا اختفت الملكية الرأسمالية وهى

الكيفية الأساسية للنظام الرأسمالى، وحلت محلها الملكية الاشتراكية فإن نظاما جديدا يحل محل النظام الرأسمالى وهو النظام الاشتراكى. وبينما يحدث التغير من الرأسمالية إلى الاشتراكية فجأة أي بالانقلاب الثورى المباغت، نجد أن الانتقال من الاشتراكية إلى الشيوعية لا يتم فجأة بل بالتغير المستمر البطيء.

٣- قانون سلب السلب : ويكشف عن الاتجاه العام للتطور فى العالم المادى، فتاريخ المجتمع الإنسانى يتألف من حلقات نفي أو سلب النظم الجديدة للنظم القديمة. فقد قضى مجتمع الرقيق على المجتمع الشيوعى البدائى، وقضى مجتمع الإقطاع على مجتمع الرقيق وقضت الرأسمالية على مجتمع الإقطاع، ثم قضى المجتمع الاشتراكى على مجتع الرأسمالية. وكل نظام يشتمل فى نفسه على مبادئ كامنه فى ذاته تكون السبب فى القضاء عليه، فالمجتمع الرأسمالى يحوى فى ذاته على مبادئ إنهياره، ولا يعنى السلب أن الجديد ينسخ القديم كله، بل الواقع أنه يستبقى من القديم أفضل ما فيه فيدمجه فى الجديد، ويرفعه إلى أعلى، وإذن فالتطور هو استمرار تغلب الجديد على القديم إلى ما لا نهاية .

أما المادية التاريخية فترى أن المجتمع يتطور ويتقدم طبقا للتنظيم الاقتصادى ولأساليب الإنتاج أو المادة بوجه عام. ويرى ماركس أن

الإنتاج المادى هو أساس تطور المجتمع، وأن العمل هو أساس الحياة الوجود.. ويرى **ماركس** أن الدراسة التاريخية للمجتمع كشفت عن خمسة أشكال أو صور متعاقبة لأساليب الإنتاج، وأن المجتمعات تمر بهذه الأشكال الخمسة وهى :

المجتمع الشيوعى البدائى، ومجتمع الرقيق، ومجتمع الإقطاع، والمجتمع الرأسمالى، والمجتمع الاشتراكى، وهذا المجتمع الأخير يرى **ماركس** أنه سينتهى حتما إلى المجتمع الشيوعى حيث لا طبقات ولا فوارق ولا ملكيات خاصة .

ويرى **ماركس** أن المادية التاريخية ترىنا أن المجتمع الإنسانى الذى ابتدأ بالنظام الشيوعى لابد وأن ينتهى حتما إلى النظام الشيوعى، وأن كل نظام جديد يحتفظ لنفسه طبقا لقانون سلب السلب ببعض خصائص النظام الذى سبقه .

ويضم **ثابت الفندي** الفيلسوف الإنجليزى الشهير **برتراند راسل** إلى تلك القائمة، بسبب إنكاره إمكان معرفة وجداننا أو فكرنا معرفة مباشرة، ثم يختم استعراضه لتلك المذاهب المادية بقوله «إن المذاهب المادية على اختلافها اجتثت الميتافيزيقا من جذورها باجتثاث موضوعاتها التى تتجاوز المادة وليس هذا أخطر ما فيها لأن اجتثاث الإنسان من جذوره الروحية أدهى وأمر. فالمشكلة فيها مشكلة

الإنسان نفسه لا الميتافيزيقا، هل هو كائن حى كمادة حية، أم هو إنسان له فكر وقيم خلقية وحضارية ومطامح أخروية فينسب إلى ما يعلو فوق المادة الحية وإلى الخلد وإلى الألوهة؟» .

فإذا انتقلنا الآن إلى التيار الثانى الذى نقده **الفندى** نقدا عنيفا وهو تيار الوضعية المنطقية وفلسفة التحليل لرأيناه يصف هذا التيار بأنه تيار لافلسفى رافض للميتافيزيقا صنفه بعض مؤرخى الفلسفة تحت اسم الوضعية المنطقية New positivism ولكن مؤسسيه أطلقوا على أنفسهم أول أمرهم اسم **جماعة فيينا** أو دائرة فيينا Vienna Cercle نسبة إلى هذه المدينة التى تركزوا فيها، وضمت الجماعة أسماء مثل **مورتس شليك** Schlick و**ريشنباخ** Reichenbach و**كارناب** Carnap و**هانز هان** Han و**نيرات** وغيرهم، وسموا مذهبهم بأسماء كالوضعية المنطقية Logical positivism والتجريبية الجذرية Radical empiricism والمذهب الفيزيائى physicalism . وأخيرا فى المهجر الأمريكى باسم العلم الموحد United Science أما عند أنصاره فى انجلترا فقد كان الاسم المفضل هو الوضعية المنطقية فى بداية الأمر، ثم فلسفة اللغة وفلسفة التحليل philosophy of Analysis وضم أسماء مثل **سوزان ستيبنج** Stebbing و**دنگان جونز** Duncan jones و**ميس** Mace وأهمهم جميعا **آير** Ayer. ولكن

سرعان ما انشقت الحركة على نفسها فى أمريكا بسبب تنبه ريشنباخ إلى قصورها وإلى نقاط الضعف فيها. كما أن الحركة فترت تماما وانتهت بعد طنطنة ومؤتمرات دولية دعائية مكثفة فى بدايتها خلال السنوات العشرة السابقة على الحرب العالمية الثانية، إذ نبذ أمر الوضعية وعاد إلى الميتافيزيقا .

ويرى **الفندى** أن هناك سمات مشتركة تصف هؤلاء منها تعصبهم ضد الميتافيزيقا وانحيازهم للعلم وارتكازهم على تجربة **هيوم** وربط أفكارهم بالمنطق الرياضى كما اضطر عند راسل **وفنجنشتين** ولقد انتهوا إلى القول بأنه لا يوجد غير مصدر واحد للمعرفة هو التجربة الحسية التى تعتمد على ما هو مادى وحسب.

ومن الناحية التاريخية البحتة بدأت المرحلة الإنجليزية التى تقع تحت اسم فلسفة التحليل حينما انتهى عصر ازدهار الوضعية الجديدة فى فيينا والذى لم يلبث طويلا. وفلسفة التحليل تركز أساسا على فلسفة **جورج مور** الذى كان عدواً لدوداً للأبحاث الميتافيزيقية، والذى ناصر القضايا المشخصة أو الجزئية التى تبتعد عن كل ما هو كلى وعام .

لقد استهدفت الفلسفة التحليلية بقول **الفندى** «تحليل الوقائع أو القضايا المعبرة عن العلم إلى أبسط مكوناتها بقصد «توضيحها»

Clarification ومن أهدافها أيضا جعل الفلسفة «علمية» بمعنى أن يتناول الفلاسفة مسائل يمكن أن تُحل أو يُبت فيها بدلا من إثارة مشاكل كبرى لا أمل في حلها. وطريقة الوصول إلى ذلك أن تؤخذ المسائل مسألة.. مسألة بدلا من أن تعالج كلها معا».

ويعطينا **الفندى** مثالا آخر للفلسفة التحليلية هو الفرد حول **آير** Ayer الذى حاول تحرير الفلسفة من الميتافيزيقا على أن تترك للعلم التجريبي البحث عن الظواهر وتقع هى بتحليل اللغة العلمية وتوضح قضايا العلوم التجريبية وذلك بأن تترجمها إلى قضايا ذات مضامين حسية Sense Contents بواسطة «مبدأ التحقيق» - Verifi-cation principle المعروف فى الوضعية المنطقية، للكشف عن قيمة الصدق فى التركيب اللغوى للقضية .

وينتهى **ثابت الفندى** إلى أن مثل هذه التيارات التى حاولت استبعاد الميتافيزيقا التى أكدت وجود الله وخلق العالم وحرية الإرادة وخلود النفس وكل القيم التى حارب الإنسان من أجلها واستهدف تحقيقها والوصول إليها لم يكتب لها النجاح، واعتبرت مجرد محاولات سطحية لم تلبث أن اكتُشف زيفها، ومن هنا ظهرت تيارات جديدة عادت بنا إلى الفلسفة الحقة مثل الفلسفة الفينومينولوجية وفلسفات الوجود المعاصرة وفلسفة الحدس عند **برجسون** وغيرها.

وهكذا اضمحل تصور الفلسفة عند هؤلاء التحليليين إلى حد أنها أصبحت طفيلية على العلم، ولا سبب لوجودها إلا قيام العلم، والعلم نفسه فى غنى عن توضيحاتها وكل ذلك من أجل استبعاد الميتافيزيقا الأنتولوجية التى أكدت وجود الله، وحدوث العالم، وحرية الإرادة وخلود النفس، وانتهى بهم الأمر إلى اعتبارها مرضا لغويا فى العقل يجب الشفاء منه بالمنطق ولكن الله شفى الفلسفة منهم .

المراجع

- ١- إنجلز : (ضد دوهرنج) ت : فؤاد أيوب، دار دمشق - ط ٥ - ١٩٨١ .
- ٢- ماركس : (رأس المال) المجلد الأول، دار التقدم ، موسكو - ت فالح عبد الجبار
وأخرون - ١٩٨٧
- ٣- ثابت الفندى : (فلسفة الرياضة) دار المعرفة الجامعية - ١٩٨٧ .
- ٤- ثابت الفندى : (أصول المنطق الرياضى) دار المعرفة الجامعية - ١٩٨٩
- ٥- ثابت الفندى : (مع الفيلسوف) دار النهضة العربية - ١٩٨٠ .

مقدمة الكتاب

بسم الله الرحمن الرحيم

وبه نستعين.. والصلاة والسلام على سيد المرسلين .

وبعد فهذه فيما أعلم أول دراسة بالعربية فى موضوع جليل شغل الفكر الغربى طويلا وما زال يشغله وهو موضوع «أسس الرياضة» على حد اصطلاح الرياضيين أو «فلسفة الرياضة» كما اصطلح الفلاسفة والمتفلسفون من الرياضيين .

والكتب الغربية الكثيرة فى هذا الموضوع تعانى إما من السطحية، وإما من التعقيد الفنى. والعرض السطحى يشوّه ولا ريب المسألة العلمية ويفقدها قيمتها. أما التعقيد الفنى فأمر يهم الرياضيين.

ولذلك فإن هذه الدراسة البحتة التى أخص بها الفلاسفة قبل غيرهم، كان لابد أن تتحاشى الجوانب الفنية كما يعرضها الرياضيون فى أبحاثهم، وكان لابد أن توطئ المسائل على النحو التالى الذى اتبعته هنا.

فإلى قراء الفكر المعاصر أقدم هذه الخلاصة فى فلسفة الرياضة.

و. محمد نابين (الفنرى)

الفصل الأول

تقعيد فى فلسفة العلوم

- (١) الصلة بين العلوم والفلسفة .
- (٢) حركات النقد الذاتى فى العلوم وفلسفة العلوم .
- (٣) المنهج الذى اتبعناه فى عرض فلسفة الرياضة .

(١)

هناك دائماً صلة وثيقة بين العلوم والفلسفة، وفي الفكر القديم حينما كانت العلوم أجزاء من الحكمة أو الفلسفة لم تكن الصلة صلة جزء بكل فحسب، وإنما كانت فوق هذا صلة اهتمام من الفلسفة الأولى بتحليل أو تبرير المبادئ والمسلّمات التي تقوم عليها العلوم.

وفي الفكر الحديث بعد أن استقلت العلوم شيئاً فشيئاً عن أمها الفلسفة، ظلت تلك الصلة قائمة ولو من طرف واحد، أعنى من جهة الفلسفة وحدها التي عُنيت في نطاق اهتماماتها المنطقية بالتعرف إلى مناهج العلوم أو طرائق التفكير التي كفلت للعلوم تقدماً مطرداً بعيداً عن الفلسفة وطرقها ومنطقها، فنشأ بذلك في أحضان الفلسفة فرع من الدراسات المنطقية غير مسبوق سمي مناهج العلوم (Meth-odology) وفي الفكر المعاصر تجاوزت الصلة بين العلوم والفلسفة تلك الحدود الضيقة التي عبرت عنها فكرة مناهج العلوم.

فلقد نشأت في العلوم نفسها - وخاصة المتقدمة منها - حركات نقد ذاتي لبنائها العلمي من داخله، لاختبار الأفكار والمبادئ أو الأسس التي يقوم عليها البناء، وبيان الارتباط بينها وبين قضايا العلم ونظرياته المشتقة منها. فقدمت بذلك العلوم نفسها المشاكل التي تواجهها والموضوعات التي تثيرها، إلى الفلسفة التي وظيفتها الدائمة

أيضا نقد المعرفة المتكونة فى أنساق علمية بتحليل البناء العلمى للوقوف على حقيقة الأسس التى يقوم عليها وطبيعتها وقيمتها . فظهر بذلك مرتبطا بحركات نقدية فى العلم، ما يسمى اليوم «فلسفة العلوم» Philosophy of Sciences التى هى الآن ملتقى الباحثين من المعسكرين العلمى والفلسفى ومجال التعاون المثمر بين العلماء والفلاسفة. وتقهقرت تبعا لذلك عبارة مناهج العلوم، فلم تعد تظهر إلا فى الكتب الطلابية. وربما أصبح استعمالها اليوم بالنسبة إلى العلوم المتقدمة لا مضمون له لأنها توهم بدراسة الطرق التى يمارسها العلماء فعلا فى علومهم المختلفة وهذا بالطبع لا يفيد العلماء أنفسهم شيئا جديدا لم يكونوا على علم به من قبل، كما لا يفيد الفلاسفة من حيث أنهم يرفضون قطعاً أن تكون الفلسفة علما على غرار تلك العلوم أو أن تتخذ طرقها. إذ الأمر الهام فى هذه الفلسفة ليس البحث عن منهج علمى يحتذى أو يفرغ وإنما تحليل البناء العلمى القائم فعلا إلى عناصره وأسسها ونقد هذه الأسس لنبد ما لا ضرورة له وتقويم الحقيقة العلمية فى نطاق حقائق المعرفة الإنسانية .

ولا شك أن فلسفة العلوم تتضمن حتما الإشارة إلى المناهج العلمية، ولكن ما تتضمنه بالأصالة هو الإشارة إلى حركات نقدية هامة تميز الفكر المعاصر فى العلوم القائمة فعلا عند العلماء

أنفسهم للأسس والمبادئ التى تقوم عليها علومهم وإعادة النظر فيها من جديد بالتحليل وبالضبط المنطقى فى ضوء حاجات جديدة للعلم ذاته. كما تتضمن بالضرورة فوق هذا الإشارة إلى مضامين فلسفية بحتة سواء عند الفلاسفة أو عند العلماء وذلك عندما ينتهى البحث إلى تحديد طبيعة « الحقيقة » التى يصل إليها العلم وقيمتها وصلتها بغيرها من الحقائق فى نطاق نظرية للمعرفة.

(٢)

وكما قلنا فقد هيات حركات النقد التى حدثت فى داخل بعض العلوم المتقدمة ومن قبل العلماء أنفسهم (فى الرياضيات والطبيعات) إلى نشأة فلسفة العلوم اصطلاحا وموضوعا . ولقد كانت فلسفة التاريخ أسبق فلسفات العلوم ظهورا وانتعاشا منذ أوائل القرن التاسع عشر رغم حداثة دخول علم التاريخ المرحلة العلمية التى نقلته من معرفة أدبية بقصد العظة والاعتبار، إلى علم يدخل الدراسات الجامعية بقصد فهم الأحداث وتفسيرها بأسبابها الحقيقية. فلقد ظهرت فلسفة التاريخ عند هيجل Hegel فى ألمانيا كمحاولة لتجاوز أحداث التاريخ الغزيرة المختلطة إلى فهم لمنطق العقل الذى أنتجها وهو منطق الجدال الذى ينتقل من النقيض إلى

نقيضه ثم إلى ما يؤلف بين النقيضين. وتلميذه **ماركس** رغم قبوله لهذا المنطق لم يقبله جدلا بين أفكار مجردة للعقل وإنما بين عوامل اقتصادية بحتة ومن ثم جاء الفهم المادى للتاريخ. أما عند معاصرهما الفرنسي **أوجست كونت** Conte فقد تبلورت نظريته الفلسفية للتاريخ فى علم جديد إذ اقترح أنه يجب أن يوجد علم الاجتماع الذى عليه أن يبدأ بإثبات وقائع خاصة بحياة الإنسان (وهذا هو عمل التاريخ) كما عليه أن يكتشف العلاقات السببية بين تلك الوقائع أى القوانين الاجتماعية (وهذا عمل علم الاجتماع) وبذلك يبدو أن عالم الاجتماع يرفع التاريخ إلى مرتبة علم بأن يفكر علميا فى نفس الوقائع التى يتناولها المؤرخ تجريبا وذلك بربطها بقوانين .

لكن فلسفة التاريخ فى القرن العشرين ابتعدت كثيرا عن تلك الأنظار الميتافيزيقية البحتة وأصبحت أكثر وعيا بمشاكل علم التاريخ كعلم وأكثر مقدرة على نقده وتحليله عند أمثال **كروتشه** Croce فى إيطاليا و**كولنجوود** Collingwood فى إنجلترا و**دلتاى** Dilthey فى ألمانيا .

أما فلسفة الطبيعيات أو فلسفة العلوم الطبيعية (Philosophy of

- physical sc. أو philos. of Natural Sciences) فهى آخر فلسفات العلوم ظهروا فى القرن العشرين رغم أن الاصطلاح نفسه يرجع إلى

نيوتن في القرن الثامن عشر حيث كان عنوانا لكتابه في الطبيعيات. وفي الواقع كانت الطبيعيات إلى السنوات الأولى من القرن العشرين واثقة تماما من خطواتها التي قطعتها مدى قرنين وكان يظن أن اكتشافاتها الهامة قد تمت وأن تقدمها المرتقب بعد ذلك إنما كان في المزيد من الدقة في قوانينها القائمة، أو على حد تعبير مؤلف أمريكي : «كان في المزيد من دقتها حتى الكسر العشري الرابع بدلا من الكسر العشري الثالث». ولكن في العشرينيات من هذا القرن ظهرت نظرية النسبية فتعرضت معها الطبيعيات الكلاسيكية إلى هزة عنيفة دخلت بها ومعها مرحلة النقد الذاتي لأسسها ومبادئها وتصوراتها الجوهرية. وبالتالي اتجهت وجهة فلسفية أكثر منها علمية تبرر إسهام الفلسفة في نفس المسائل التي أثارها الاتجاه الجديد. ذلك لأن المسائل التي أثارها النقد الداخلي للطبيعيات مسائل ذات طبيعة فلسفية عريقة : ما طبيعة الزمان وما طبيعة المكان وما الحركة ؟ كيف يمكن أن تطبق التصورات الهندسية؟ كيف يصح أن يكون الزمان بُعداً رابعاً؟ إن عالم الطبيعة الذي يتخذ موقفا نقديا من علمه القائم، ويحلل المبادئ والأسس تحليلًا نقديا ليجيب على مثل هذه المسائل الفلسفية، يتوقف بالضرورة عن أن يكون عالما بالطبيعة وحسب إذ يصبح كذلك فيلسوفا يفلسف أو يقوم علمه، ويسهم معه

الفيلسوف فى مناقشة وتحليل تلك المسائل الفلسفية العريقة فى
قدمها عند الفلاسفة .

ولقد انتعشت فلسفة الطبيعيات بعد ذلك إلى درجة أكبر منذ
ظهور الطبيعيات الذرية وما أدت إليه من تساؤلات فلسفية وعلمية
متشعبة يمس بعضها الأساس الذى يقوم عليه العلم كله وهو هل
هناك فى عالم الذرة حتمية مطلقة أم يتسع الأمر إلى قبول نوع من
الحرية ؟.

أما الرياضيات فقد سبقت إليها الحركة النقدية منذ أوائل القرن
الماضى عند الرياضيين أنفسهم وهى مستمرة حتى اليوم .

حقيقة إنه لا يوجد علم أكثر عراقة فى تاريخه من الرياضة. فقد
دخلت الرياضة مرحلة اليقين العلمى منذ أقدم المفكرين الذين حفظ
لنا التاريخ أسماءهم : **طاليس** و**فيثاغورث**. كما أنه لا يوجد علم
انحدر إلينا عبر القرون كبناء وثيق شاهد بالعبقريّة العلمية للإنسان
مثل هندسة الرياضى الإسكندري **أقليدس**. ولكن بعد ثلاثة وعشرين
قرنا من الثبات والتقدم ظهر **هندسيّون** من أمثال **ريمان** (Reimann)
و **لويتشفسكى** (Lobachevaski) فى القرن الماضى وغيرهما من
الرياضيين الذين كانوا ينقبون فى أسس علمهم وقواعده التى يقوم
عليها فشعرت بفضلهم الرياضيات فجأة بحاجتها إلى نقد ذاتى

لتقصي أسسها وأصولها التي تقوم عليها طوال القرون عندما تبين هؤلاء الرياضيون إمكان هندسات أخرى عديدة كل واحدة منها متسقة القضايا أو النظريات ومخالفة لغيرها. كما تختلف جميعا عن الهندسة الموروثة عن أقليدس، وبدا فوق هذا أن بعض تلك الهندسات الجديدة أكثر قربا من الواقع الكروي لكوكبنا من الهندسة التقليدية، وأن الكثير منها واسع التطبيق أيضا. كل هذا إنما تبين بتحليل البناء الهندسى التقليدى للوصول إلى أسسه ومسلماته ثم بتغيير الأسس والمسلمات تغييرا يودى إلى قيام هندسات أخرى مغايرة. كما تبين كذلك أنه لكى يقوم علم هندسى وثيق، يجب الابتعاد بالمسلمات عن كل الأشكال المكانية والاكتفاء بإحالتها إلى المنطق الصورى وحده حتى لم تعد الهندسة نظرا فى أشكال هندسية وإنما فقط فى علاقات منطقية بحتة. كل هذا النقد الباطنى القائم على تحليل البناء الرياضى بما فيه المسلمات إنما عرف عند الرياضيين بمسألة «أسس الرياضيات» (Foundation of Mathematics) بينما تسمى المسألة نفسها عند الفلاسفة والكثيرين من الرياضيين أيضا «فلسفة الرياضيات» (Philosophy of Mathem.) لأنه واضح الآن أن أولئك الرياضيين الباحثين فى الأسس والأصول إنما يفلسفون وأنهم بالتجائهم فوق هذا إلى المنطق الصورى الذى هو لباب الفلسفة

وجوهرها إنما التقوا مع الفلاسفة المهتمين بنقد المعرفة العلمية عن طريق تحليل البناء العلمى إلى عناصره وأسس لتحديد طبيعة تلك الأسس وما يترتب عليها من قضايا ونظريات مشتقة منها على أساس المنطق وحده وحسب فتساءل حينئذ الفلاسفة : أهى كلها قضايا من طبيعة المنطق الصورى أم أنها لا تمت إلى هذا المنطق بصلة وإنما تستقى من منابع تجريبية تعرف عند الرياضيين باسم «الحدس» ؟ .

ثم ما معنى «الحقيقة» فى الرياضة وما قيمة الحقائق الرياضية؟ هكذا نجد أن فلسفة الرياضة اليوم متلقي أبحاث الرياضيين والفلاسفة معا وأكبر مظهر من مظاهر التعاون المثمر بين العلم والفلسفة .

ولقد انعقد أول مؤتمر دولى لفلسفة العلوم وتحت هذا الاسم فى باريس سنة ١٩٣٥ وتعاقبت بعده مؤتمرات أخرى . كذلك ظهرت فى برامج الجامعات دراسات تحت هذا الاسم . كما ظهرت مجالات عديدة تحمله^(١) وفى كل الأحوال ينصب البحث فيها على الرياضيات والطبيعيات بصفة خاصة وإن كان يصح أن يمتد ليشمل علوم الأحياء والتاريخ والعلوم الإنسانية الأخرى .

أما المسائل التى تعالج فى فلسفة العلوم فأمراً مختلف فيه أشد

الاختلاف، ولقد ذكرنا أمثلة سريعة لمضمون هذه الفلسفة فى التاريخ والطبيعيات والرياضيات. ولكن يمكن الإشارة إلى ما يأتى من الموضوعات :

أولاً : موضوعات ذات طابع منطقى صرف. وهى إما موضوعات من المنطق الرمزى نفسه أو أبحاث فى التعريفات والقضايا الخاصة بعلم ما مع تحليلها تحليلًا رمزيًا (أى بواسطة رموز المنطق الرياضى) بقصد اشتقاق الحدود المعرفة بعضها من بعض وبرهان القضايا أو النظريات على أساس المسلمات .

ثانيًا : موضوعات ذات طابع فنى علمى، وهى بالنسبة إلى الرياضىة كالبحت فى أسس (Foundation) البناء الرياضى كله أو أسس أية نظرية رياضىة منفردة لاستقصاء الأصول والمسلمات، أو كالبحت فى معالجة نقائض الرياضىة. أما بالنسبة إلى الطبيعىات فكالبحت فى الأفكار الأساسىة التى تستند إليها، مثل أفكار الزمان والمكان والحركة والضوء والسرعة والذرة وبالجملة كل الثوابت فى الطبيعىات الرياضىة .

ثالثًا : موضوعات ذات طابع منهجى (أى خاص بمناهج كل علم على حدة) ففيما يختص بالرياضيات يتناول البحت كىفية إقامة ما يسمى النسق الاستنباطى Deductive System كما يتناول بحت

الشروط المنطقية لاختيار المسلمات، وفيما يختص بالطبيعيات يتناول البحث مشكلة الاستقراء من جوانبها المختلفة .

رابعاً : موضوعات ذات طابع فلسفى ومثالها المواقف الفلسفية الأساسية التى يقفها الباحث حيال حقائق علم ما من العلوم. ففيما يختص بالرياضة مثلاً نجد فى الوقت الراهن ثلاثة مواقف أساسية تتنازع الأمر فوق مسرح الأبحاث الخاصة بأسس الرياضة وهى : موقف المنطقة الذين يرون فى قضايا الرياضة مجرد قضايا من المنطق الصورى وحسب، ثم موقف الأكسيوماتيكيين الذين يرون أن المنطق والرياضة نابعان سوياً من أصل آخر قبلهما هو الطريقة الأكسيوماتيكية، ثم أخيراً موقف الحدسيين الذين يرفضون الموقفين السابقين ويؤكدون أن الحقائق الرياضية لا صلة لها بالمنطق وأنها نابعة من نوع خاص من التجربة الفكرية يسمى «الحدس الرياضى». أما فيما يختص بالطبيعيات فيدور البحث حول تحديد أفكار كالعلمية والاحتمالية والفرض والقانون والاحتمال وما قارب هذه المسائل التى تلتقى كلها فى تقويم للقوانين العلمية وهل هى حقائق ضرورية أم اتفاقات عابرة من صنع العلماء أم غير ذلك من المواقف الفلسفية المعروفة حيال فكرة «الحقيقة».

(٣)

نريد الآن أن نحصر جوامع الكلم فى فلسفة الرياضة كما
سنقدمها فى الفصول القادمة .

ونحن لكى نستعرض موضوعا معقدا كهذا له جوانبه الفنية
البحثة لا نريد أن نختط فيه غير خطة تاريخه هو نفسه وحسب.
فأوضح الطرق إليه وأيسرها الالتزام بالمنهج التاريخى فى تعقب
ظهور المسائل وتطورها وحلولها واتجاهاتها عبر التاريخ الطويل
للرياضة والفلسفة معا. إلا أن منهجنا التاريخى هو مع ذلك نقدى
تحليلى فى آن واحد. بمعنى أننا نتوقف أمام كل مسألة تظهر فى
التاريخ المشترك بين هذين العلمين. لنفهم مغزاها ودورها الذى
تؤديه فوق مسرح فلسفة الرياضة بحيث يبدو فى حقيقة الأمر أن
البحث ليس تاريخيا وحسب، وإنما هو أيضا نقد وتحليل للمواقف
الفكرية الأساسية مع تقويم الدور الذى يؤديه كل موقف منها، ومن
ثم قسمنا خطواتنا فى البحث إلى المراحل الأربعة الآتية :

فى المرحلة الأولى نبدأ من تعريف تقليدى للرياضة بموضوعاتها
(انظر الفقرة ٤) ونحاول أن نتتبع الأصول التى نشأت عنها تلك
الموضوعات فنرفض الحلول المثالية والحسية والاجتماعية لفكرتى
المكان والعدد (الفقرة ٥) ونبين أنه لابد لنشأة موضوعات الرياضة من

حضارة العلم والعقلية العلمية مما توافر في بلاد اليونان القديمة لأول مرة في التاريخ، وهكذا نشأت الرياضيات منذ **فيثاغورث** وإليه ينتسب الرياضيون القدماء الذين اهتموا ببرهان النظريات متفرقة دون محاولة تنسيقها جميعا في نسق علمي موحد (الفقرة ٦) أما تنسيقها في علم موحد فيرجع الفضل فيه إلي رياضي من العصر الإسكندري هو **أقليدس** الذي أفاد من تحليلات **أرسطو** الرائعة للأسس التي تستمد منها الهندسة براهينها وهي التعريفات والأصول والمسلمات، فكان هذا التحليل الأرسطي حجر الزاوية في البناء الرياضي الكبير الذي أقامه **أقليدس** طبقا لذلك التحليل. كما كانت المسائل التي أثارها المنهج المشترك بين **أرسطو** و**أقليدس** هي عين المسائل التي سيثيرها المحدثون بشأن الرياضة وأسسها (فقرة ٩).

وفي مرحلة ثانية نبدأ من تقسيم للرياضة إلى هندسة وتحليل ونتناول الهندسة في العصر الحديث على انفراد ونبين كيف أن محاولات الرياضيين الفاشلة، برهان المسلمة الخامسة عند **أقليدس** بالإضافة إلى محاولات قبول مسلمات بديلة لها تناقضها، أسرع بظهور هندسات لا حصر لها في القرن التاسع عشر، كما أسرع بحركة النقد الذاتي في الوقف عينه وعند الرياضيين أنفسهم لعلمهم ولأسسه ومسلماته (فقرة ١٠) مما أدى بهم في آخر المطاف إلى

تصور جديد «للمحقيقة» الرياضية التي لم تعد عندهم مطابقة المسلمات للواقع وإنما فقط عدم تناقض مسلمات كل هندسية على حدة فيما بينها بغض النظر عن الواقع أو المكان لأنه لا واحدة من الهندسات أولى من غيرها بادعاء المطابقة (فقرة ١١) كما أدى بهم أيضا إلى تقصى مسلمات كل هندسة على حدة وحصر النظريات المترتبة عليها، وإلى الاقتصاد فى عدد المسلمات وتخفيضها إلى أدنى حد ممكن وهذا كله مما عرف آنذاك بمباحث تأسيس الهندسة أو «الأكسيوماتيك» وهى الحركة التى أسفرت آخر الأمر عن تجريد المسلمات عن كل المعانى الهندسية الدالة على أشكال وإحالتها تماما إلى تصورات من المنطق الصورى وحده. وعند هذا الحد أصبح لزاما على المنطق الصورى أن يتطور أيضا إلى علم رياضى (فقرة ١٢) كما أن اختيار طائفة من المسلمات لإقامة هندسة ما اتضح أنه يجب أن يخضع إلى شروط منطقية معينة إذا لم تراعى تلك الشروط تناقضت المسلمات أو أدت إلى نظرية أخرى (فقرة ١٤).

وفى مرحلة **ثالثة** من البحث نتناول الجبر والتحليل ونتصدى لحركة النقد الذاتى فى التحليل التى انطلقت من اكتشاف دوال رياضية منفصلة أى لا تشهد «بالاتصال» أو الاستمرار وكان يظن أن الدوال كلها متصلة أى تجتاز قيما عددية متتابعة لا فجوات فيها

وبذلك تعبر خطا هندسيا متصلا. فظهرت منذ ذلك الوقت فى منتصف القرن الماضى حاجة ملحة عند الرياضيين إلى التخلي عن الحدى الهندسى برمتة الذى يمثل فى التحليل ذلك الاتصال (فقرة ١٦) فنبت الرياضيون فكرة الاتصال كأساس للتحليل واتجهوا إلى الأعداد الحسابية المعروفة يلتمسون فيها أساسا وثيقا لعلم التحليل وأصبح هذا الاتجاه محتوما منذ اكتشاف الأعداد التخيلية (فقرة ١٧) وهكذا بدأ الرياضيون يردون إلى الرياضة كلها إلى الحساب الأولى المعروف وأصبح العدد الصحيح، المقياس الوحيد لليقين الرياضى. وهذا ما عرف فى تاريخ الرياضة فى القرن الماضى بحركة «تحسب» (إن أمكن التعبير) الرياضة أو «بالمذهب الحسابى» فردوا الأعداد التخيلية إلى العدد الصحيح (فقرة ١٨) كما ردوا إليه أنواع الأعداد جميعا ومن أهمها الأعداد الصماء التى احتاجت إلى إحدى نظريتين : الحد أو القطع، لكى ترد إلى الأعداد الصحيحة وربطوا الهندسة بواسطة الأعداد الصماء التى تشهد بالاتصال (أو بعملية متصلة) إلى الأعداد الصحيحة. فأصبحت الرياضة كلها قائمة على الأعداد الصحيحة وعملياتها واكتسبت الرياضة منها يقينها كذلك. وهكذا أضفى المذهب الحسابى على الرياضيات وحدة وتماسكا، ويقينا مستمدا من يقين الأعداد (فقرة ١٩) ثم ظهرت فى نفس الوقت

الذى نضج فيه المذهب الحسابى فى الربع الأخير من القرن الماضى نظرية المجاميع للرياضى جورج كانتور الذى اقتحم بها أمنع الحصون على الفكر البشرى وأقدمها وهو حصن الأعداد اللامتناهية فوسع من أفق الحساب وأمد به عالم من أبدع ما اكتشف الإنسان. وفي هذا كله دعم للمذهب الحسابى من خارجه، وتأكيده بأن الأعداد كلها، المنتهى منها واللامنتهى، أساس كل شئ فى الرياضه (الفقرة ٢٠).

وإذا كانت الكلمة الأخيرة فى المذهب الحسابى هى أن الأعداد الصحيحة هى كل شئ فى الرياضه فإن الرياضيين الباحثين فى أسس علمهم بعد ذلك لم يقنعوا بمثل تلك النتيجة ورأوا أنه لى تكتسب نظرية الأعداد نفسها كل ما هى جديدة به من يقين لابد من العودة إلى المنهج الرياضى التقليدى وهو إقامة الأعداد نفسها على «مسلمات» تنتجها ومن ثم محاولات كثيرة فى أكسيوماتيك العدد. وقد استدعت هذه المحاولات تحليلا منطقيا جديدا للأعداد نفسها لى ترد إلى ثوابت المنطق الصورى ، كما احتاج المنطق الصورى نفسه إلى دفعة حاسمة جعلته علما رياضيا بحثا بحيث ينهض ببتبعاته الجديدة من جهة استنباط الأعداد منه، وكذلك للمساهمة فى حل نقائض الرياضيات المعاصرة (فقرة ٢١).

بقيت المرحلة الرابعة والأخيرة التي نستعرض فيها المذاهب المعاصرة فى فلسفة الرياضه مجردة عن كل جوانبها الفنية البحتة التى لا تهتم إلا الرياضيين وحدهم. ونتوقف طويلا عند المذهب الأول منها وهو المذهب اللوجستيقى، وهو موقف أولئك الفلاسفة الذين رأوا إمكان قيام فلسفة علمية، أى تتخذ منهج العلم. وموضوعها متابعة تحليل الرياضه إلى أبعد مما وصلت إليه فى المذهب الحسابى أو فى حركة أكسيوماتيک العدد. فكان منهج هذه الفلسفة العلمية هو المنطق فى أقوى وأحدث صوره الرياضيه وهو ما يسمى اللوجستيقا، أما موضوعها فهو اشتقاق العدد من ثوابت المنطق الجديد ومن وراء العدد اشتقاق كل نظريات الرياضه كما رتبها المذهب الحسابى (فقرة ٢٢). ولابد أن نستعرض أول فروع الحساب فى هذا المنطق وهو حساب القضايا الأولية لكى نلمس عن قرب طبيعه هذه الآله الفنية الجديدة التى تستعملها الفلسفة العلمية فى معالجة مشكلات العلم الرياضى (فقرة ٢٤) ونتبين أيضا الأسس المنطقية البحتة لذلك البناء اللوجستيقى الذى يجمع المنطق والرياضه معا فى نسق موحد نترج فيه من المنطق إلى الرياضه بحيث تبدو الرياضه مشتقة من المنطق عن طريق العدد الذى انتهى إليه المذهب الحسابى (فقرة ٢٥). ثم نعالج بعد ذلك المذهب الأكسيوماتيکى وهو الذى يرفض

اشتقاق الرياضة من المنطق ويقرر أن الرياضة والمنطق ينبعان متوازيين معا من شيء قبلهما هو الطريقة الأكسيوماتيكية (فقرة ٢٦). ثم نختتم باستعراض المذهب الحدسي الجديد الذي يرفض المذهبين السابقين ويعود إلى فكرة الحدس أو تلك التجربة الفكرية المباشرة التي يألّفها الرياضيون كمنبع أصيل ووحيد للرياضة (فقرة ٢٧). ولا سبيل إلى التوفيق بين هذه المذاهب المتصارعة الآن فوق مسرح الأبحاث الخاصة بأسس الرياضة لأنه على حد تعبير الرياضي هنري بوانكاريه، لا سبيل إلى التوفيق بين المنطقيين والتجريبيين، بين ذوى العقلية الكانتورية (نسبة إلى جورج كانتور) التي تقبل أعدادا لا متناهية وذوى العقلية غير الكانتورية التي لا تقبل إلا الأعداد المنتهية، بين من سماهم وليم جيمس ذوى العقول الرقيقة وذوى العقول الخشنة.

الهوامش

١-المجلات الآتية (بلمنور بأمريكا) Philosophy of Science (جوتنبرج بألمانيا) Theoria

(أكسفورد بإنجلترا) Analysis - (ليبيج بألمانيا) Erkenntnis .

الفصل الثاني

موضوعات الرياضة ونشأتها عند الإنسان وتاريخها قديما

(٤) التعريف التقليدى للرياضة بموضوعاتها .

(٥) الأصول الفزيولوجية والاجتماعية لفكرتى المكان والعدد ، أو

للهندسة والحساب .

(٦) نشأة الرياضيات كعلم عند اليونانيين .

(٤)

تبدو الرياضيات الآن عند النظرة الأولى أنها تختلف تماما عن غيرها من العلوم كالطبيعيات وعلوم الأحياء مثلا .

فهذه الأخيرة تستند إلى مشاهدات حسية وتجارب، وتحتاج إلى معامل علمية وألات متفاوتة تعقيدا لكي تتكون وتنمو.

فى حين أن الرياضيات تستعيز عن ذلك كله بالسبورة أو الطباشير أو بالورق والقلم وحسب. كما لو كانت تنبع كلها من رأس الرياضى. وهذا ما عبرت عنه لوحة من القرن السابع عشر محفوظة بمتحف اللوفر صور فيها **فريديناند بول** (Boll) الرياضى رجلاً ينظر إلى سبورة عليها أشكال وأعداد. كما عبرت عنه أيضا فلسفات كبرى منذ القدم فقد ذهب **أفلاطون** إلى أن موضوعات الرياضة أو على الأصح ماهيات الأشكال والأعداد ليست من عالم الحس المتغير وإنما هى مُثُل قائمة بذواتها وثابتة، يتأملها الرياضى ويصدر عنها فى علمه، وفى محاورته المسماة باسم فتى من أثرياء أثينا هو «مينون» نجد أن خادمه الذى لم يتلق علما استطاع - بعد أن حاوره **سقراط** لتوليد الحقيقة أو المعرفة من ذهنه - أن يبرهن بون مشقة نظرية معقدة فى الهندسة، لأن تلك المحاوره أثارت فى ذهنه ذكريات قديمة لمشاهدته السابقة فى عالم علوى لتلك المثل الرياضة القائمة بذواتها أبدا.

وفى الواقع إن موضوعات الرياضة فى صورتها التى يألّفها الرياضيون اليوم تبدو مجردة عن كل ما هو حسى وكأنّها تتبع من الفكر وحده. فهى موضوعات لا تشير إلى الأشياء حتى تحتاج مقدما فى تكوينها وأطراد نموها إلى تجربة سابقة وإلى معرفة بها. وإنما هى تشير فحسب إلى الجانب الذى «يقاس» و«يعد» منها. أعنى أنّها تتناول جانب الزيادة والنقصان والمساواة فى الأشياء وهذا هو «القياس» كما تتناول جانب «الترتيب» أو «النظام» فى تتابع الأشياء وتسلسلها وهذا هو «العدد» .

ومن ثم كان الموضوع الذى تنظر فيه الرياضة كما تراه الفلسفات موضوعا مزدوجا :

القياس والترتيب (Mesure & Ordre) كما يقول ديكارت

أو الكَم والمَقْدَار، أو الكَم المتصل والكَم المنفصل كما تقول اصطلاحات أكثر قدما عند فلاسفة كثيرين، ترجع فى أصولها إلى أرسطو، ذلك هو الموضوع المزدوج للرياضة وبه تعرّف عند الفلاسفة دائما .

نلاحظ الآن فى هذا الموضوع المزدوج أنّهم يضعون فى الطرف الأول من كل ثنائية من تلك الثنائيات موضوع الهندسة، وفى الطرف الثانى موضوع الحساب. يقول مثلا ابن سينا (فى النجاء ص ٢٣٨)

«والكم ينقسم إلى المتصل.. وإلى المنفصل.. ومن حيز الكم المتصل
تبتدىء الهندسة ويتشعب دونه التنجيم والمساحة والأثقال والحيل.
ومن حيز المنفصل يبتدىء الحساب ثم يتشعب دونه الموسيقى وعلم
الزيجات. ولا نظر لهذه العلوم الرياضية فى ذوات شىء من الجواهر
ولا فى هذه الكميات من حيث هى فى الجواهر». وهو يعنى بالفقرة
الأخيرة أن الرياضيات لا تتناول الكم متصلاً أو منفصلاً من حيث
هو متحقق فى الأجسام وإنما من حيث أن الكم مجرد وخالص فى
نفسه عن كل جوهر يحل فيه .

(٥)

وواضح أن الكم والعدد كما يتناولهما العلم الرياضى أكثر الأمور
العلمية تجريداً وبعداً عن الأشياء الحسية التى يعالجها علماء
الطبيعة والأحياء بحيث يسهل على التأمل فيهما، أو بالأحرى فى
أصولهما ومنابعهما، أن يذهب مذهباً مثالياً كمذهب أفلاطون فى
القديم كما رأينا أو كمذهب الرياضيين المحدثين **هرميت** (Hermite)
و**كرونكر** (Kronecker) .

ولكن مثل هذا المذهب فى الأصول المثالية أو المنابع العقلية
الصرفة للموضوعات الرياضية لم يكن مقبولا دائماً عند المفكرين

المهتمين بأصول هذه الموضوعات وخاصة بعد أن عرف الكثير عن
فيزيولوجية الحواس كمنبع بعيد ومحتمل لهذه الموضوعات. وبعد أن
جمع علماء الاجتماع وقائع كثيرة عن فكرتى المكان والزمان اللتين
يُرد إليهما أحياناً الكم والعدد على الترتيب فى بعض الفلسفات.
وذلك عندما تقصوا أصولهما البعيدة عند الشعوب القديمة وعند
البدائيين. وأخيراً بعد أن عرفنا كذلك الكثير عن تاريخ الرياضة
وتطور موضوعاتها طوال تاريخها .

فكل هذه الدراسات الحديثة تضافرت فى إلقاء أضواء متتامة
على أصول متواضعة وتجريبية لأفكار مثل المكان والزمان والكم
والعدد وغيرها. وهذا لما يبطل كل نظرة مثالية فى أصول الرياضة
ومنابعها .

فلقد بين إرنست ماخ (Ernst Mach) فى كتابه المعرفة والخطأ
لأول مرة أن تلك الأفكار وليدة التكوين الفيزيولوجى للحواس
الإنسانية. فهناك أنواع - كما يقول - من الكم تختلف باختلاف
الحواس كالكم البصرى والكم اللمسى والكم الضغطى والكم
السمعى وغير ذلك .

ويؤيد هذا رأى أن فيزيولوجية الحواس كشفت منذ أواخر القرن
الماضى عن مثل تلك الحقائق وخاصة فيما يخص أصل فكرة المكان

وذلك فى التجارب المعروفة عند فيبير (Weber) باسم ظاهرة تعين المكان أو الموضع (Localisation) فوق سطح الجلد. فنحن نعلم الآن من تلك التجارب أن تطبيق طرفى برّجل فيبير فوق أية رقعة من سطح الجلد لا يحس باختلافهما كنقطتين متميزتين إلا إذا انفجرت زاوية البرجل انفراجا كافيا بحيث إذا نقصت تلك الزاوية لم تتمايز النقطتان وبالتالي لم تدرك المسافة بينهما أي «المكان»، كما نعلم كذلك أن لذلك الانفراج حداً أدنى يختلف كثيرا باختلاف مناطق الجلد فهو صغير جدا فوق أطراف الأنامل كبير نسبيا فوق الكتفين والفخذين مثلا. ثم نعلم فوق هذا أن ذلك الإحساس بالمسافة (أو المكان أو الكم وكلها هنا مترادفة) إنما هو نتيجة لانتشار جسيمات أو نهايات عصبية معينة -تعرفها فزيولوجيا الحواس- انتشارا متفاوتا فوق سطح الجلد فهي كثيفة فى أطراف الأنامل قليلة فى الظهر. وهذا كله يؤيد الرأى القائل بالأصول الفزيولوجية الممكنة لموضوعات الرياضة ضد المثاليين .

لكن فى الحقيقة مهما تكن أهمية تلك الأصول الفزيولوجية الممكنة فإنها لا تعدو أن تكون مجرد أصول ذاتية وفردية لا تكون علما مشتركا بين الجميع. ولذلك فإن علم الاجتماع يحاول أن يفسر هذا الاشتراك بين الناس فيذهب إلى أصول اجتماعية للأفكار الرياضية.

فعلماء الاجتماع الذين تقصوا الشعوب البدائية يقولون إن اتفاق قبيلة ما في تصور مكان خاص بها ويعم أفرادها إنما له أسباب وأصول اجتماعية بحثة تلخصها عبارة «حاجات الحياة في الجماعة» فتلك الحياة تفرض على أفراد القبيلة الانتقال للصيد وإلى مكان التوتم لأداء الشعائر الدينية، وتفرض تقسيم الأرض وتعيين الجهات واتخاذ نقط ارتكاز (علامات) فوق التربة للانتقال. ومن ثم كان المكان القبلى مكان الأعمال اليومية التى يحتاج إليها البدائي .

وفى حدود تلك الأعمال المعبرة عن حاجات البدائي فى مجتمعه يمكننا أن نتكلم عن التصور البدائي للمكان أو الكم ذلك التصور الذى يخلو تماما من كل صفة نظرية ومجردة مما يمتاز به المكان العلمى، فهو مكان ممتلىء بالأعمال والحركات التى تجرى فيه وبالعناصر المشخصة للحياة اليومية. فالبدائي يعرف كل أجزاء مكانه اليومي معرفة حركية وعملية، ولكن ينقصه للدهشة الشديدة التصور المجرد أو الإدراك العقلى الخالص عن الحركة والعمل لفكرة المكان. بحيث لو سألت بدائيا عما هو المكان مجردا عن الأعمال والحركات، أى عن المكان الذى يستعمله الرياضيون والهندسيون مثلا فإننا لا نجد عندهم للدهشة الشديدة المقدرة حتى على مجرد فهم السؤال. هذا ما يقوله علماء الاجتماع من أمثال **دوركيم** Durkheim و**موس** Mauss .

فلا بد إذن من فكر آخر غير الفكر البدائي ولا بد من حضارة أعلى من المجتمع البدائي كحضارة العلم لكي نصل إلى فكرة المكان ذي الأبعاد الثلاثة الخالية من الأعمال والحركات والأجسام، التي هي موضوع الهندسة. ذلك لأن المكان الرياضي يمتاز بصفات هامة لا تقوى عليها العقلية البدائية فضلا عن استحالة استمدادها من فزيولوجية الحواس. فهذا المكان هو مكان مستمر متصل (Continu) نستطيع أن نتنقل فيه كيف شئنا دون فجوات فيه، ثم إن أجزائه متشابهة أو متجانسة (Homegene) ولا كيف محدد لها (Isomos- phe) كما إنه لا ينتهى (Infini) بعبارة أخرى لا تكفى الأصول الاجتماعية لإقامة المكان الذى يحتاج إليه علم الرياضة .

من جهة أخرى نستطيع أن نتتبع نفس الخطوات السابقة فى نشأة فكرتى الزمان والعدد. هما فكرتان متصلتان إحداها بالأخرى من حيث أن تتابع الأعداد ربما لم يكن يمكن تمييزه إلا نتيجة لتتابع أنات الزمن فيرجع العدد بذلك إلى الزمن .

أما الزمن نفسه فنستطيع أن نتتبع أصوله فى الحياة النفسية وتتابع أحوالها عند الفرد وهذا هو الأصل التجريبي للبحث لفكرة الزمان. ولكن هذا القول لا يكفى فى إقامة علم على الزمان، لأن الزمان فردى بحث. وهو لى يكون عاماً، يزعم الاجتماعيون أنه يكفى أن

نتتبع أصوله الاجتماعية. وفي الواقع نجد أن البدائيين يقسمون
زمنهم أو أوقاتهم إلى زمان طقوس وشعائر، وإلى زمان عمل وصيد
كما نجد تقسيما آخر حسب معتقداتهم إلى زمان نحس فلا يعملون
فيه شيئا وإلى زمان حظ. فهنا زمان مشبع بالحياة البدائية ولا
يستطيع أن يؤدي إلى علم رياضي إذ تحتاج الرياضة إلى حضارة
فكرية أعلى هي حضارة العلم التي نستطيع فيها أن نجرد الزمان
من كل هذه التقسيمات البدائية العملية ونرقى إلى زمان يمتاز
كالمكان بصفات الاتصال والتجانس والخلو من الأشياء واللانهاية .

وربما كانت فكرة العدد قريبة في منابعها من فكرة الزمان فترجع
مثلا إلى تتابع الحالات النفسية عند الفرد. ولكن مهما تكن أصولها
التجريبية هذه، فهي لا تفسر لنا العدد في تجرده وعمومه كما هو في
الرياضة. ولقد وجد الاجتماعيون فكرة العدد في الشعوب البدائية في
صورة يختلط فيها العدد بالمعدود إلى حد يدهش المتحضر، فإن
البدائي يستطيع من مجرد منظر شيء ما أن يحدد عدده بينما
يحتاج هذا من المتحضر إلى مقابلة أجزاء ذلك الشيء واحدا واحدا
بسلسلة الأعداد. كما وجدوا أن بعض الشعوب البدائية لا يعرف من
سلسلة الأعداد. غير الأعداد الثلاثة الأولى وبعد ذلك يطلقون «كثير»
للدلالة العددية. وهناك شعوب بدائية تطلق أسماء مختلفة على عدد

واحد بعينه تبعا لاختلاف المعدودات. وهناك شعوب اتخذت العدد خمسة أو العدد عشرين أو حتى العدد ستين بدلا من العدد عشرة كأساس للحساب العددي. كل هذا يشهد بأن فكرة العدد التي هي أكثر عمقا من فكرتي المكان والزمان احتاجت إلى تجريد عقلي وإلى حضارة علمية أعلى من حضارة البدائي .

وفى ضوء هذا كله يتبين لنا أننا إذا رفضنا المذهب المثالي فى أصول الرياضة فإن المذهبين : الفزيولوجى والاجتماعى مهما ألقيا من ضوء على أصول متواضعة لموضوعات الرياضة إلا أنهما لا يكفيان إطلاقا فى فهم حضارة العلم .

ولذلك ننتقل الآن إلى إلقاء نظرة فى أصول الرياضيات من تاريخ نشأتها عند القدماء .

(٦)

إن أقدم وثيقة عن الهندسة هى البردية المصرية المسماة باسم مكتشفها الألمانى رند (Rhind) وهى عبارة عن مخطوطة كاتب الملك أحمس التى ترجع إلى ٢٥٠٠ سنة، وتشتمل على وصفات عملية مختلفة فى الرياضة لحل المشاكل اليومية لدى المصرى القديم. وحاجة المصرى القديم إلى إعادة مساحة أرضه عقب كل فيضان

كما يلاحظ **هيرونوت**، وإلى التعمير والبناء. هي نقطة البدء في نشأة علم المساحة الذي هو علم الهندسة في مرحلته التجريبية والمهد لها. من تلك الوصفات العملية التي لا نعلم بعد طريقة حسابها، تقدير قدماء المصريين لمحيط الدائرة بستة عشر تسعا من قطرها وهو تقدير تقريبي طبعاً. ومن تلك الوصفات أنهم توصلوا بالتقريب أيضاً إلى مساحة المثلث المتساوي الساقين والذي أضلاعه A ، A ، B وذلك بضرب $(A \times B)$ مقسوماً على اثنين مما يؤدي إلى نتيجة تقرب إلى الحقيقة كلما كان A أكبر من B . كما عرفوا عملياً كذلك أن المربع المقام على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي مجموع المربعين المقامين على الضلعين الآخرين وذلك في حالة واحدة فقط هي حين تكون أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية على التوالي ثلاث وحدات وأربع وخمس. أعنى أنهم عرفوا عملياً النظرية التي ستنسب فيما بعد إلى اليوناني **فيثاغور** ولكن في حالة واحدة بالذات هي الموصوفة أنفا ولم يستطيعوا الارتفاع عنها إلى النظرية في عمومها.

كذلك لم يستطع قدماء الهنود أن يرتفعوا إلى النظرية في عمومها إذ عرفوها عملياً محصورة في حالة واحدة هي حين تكون أطوال أضلاع المثلث خمس وحدات واثنى عشرة وثلاث عشرة على التوالي. وهكذا أدت الحاجات العملية كمساحة الأرض مثلاً بقدماء

المصريين وغيرهم كالهنود إلى السير فى الطريق المؤدى إلى اكتشاف علم الهندسة عن طريق علم المساحة ولكن دون اكتشاف الهندسة ذاتها كعلم نظرى له قضاياها ونظرياته العامة التى برهن على صدقها وعمومها فى كل خطوة من خطواته.

أما الاكتشاف الحقيقى لعلمى الهندسة والحساب بنظريتهما وقواعدهما مع البرهان النظرى على صدقها صدقا يعم كل الحالات الجزئية فمن أسرار الحضارة اليونانية .

إن إرنست رينان E.Renan وهو من أئمة مفكرى القرن الماضى، فى كتابه الطيب عن «مستقبل العلم» الذى يستفاد به فى فهم الروح العلمية برغم نظرتة الضيقة إلى العلم من خلال علم إنسانى كالفيلولوجيا (فقه اللغة) بدلا من خلال علوم الطبيعة التى يمكن أن يكون لها مستقبل واضح، إن إرنست رينان هذا لم يجد تفسيرا يبرر به ظهور العلم عند اليونانيين لأول مرة فى تاريخ الإنسانية كقضايا عامة يبرهن على صدقها إلا القول بأن ذلك هو «المعجزة اليونانية» . وهو يعنى أن المعجزات إذا كانت من نوع دينى فمعجزة اليونانيين تأسيس العلم. ولقد أصبحت عبارة رينان هذه شائعة الآن بين المؤلفين الغربيين الذين يشاطرونه الرأى بأن العلم عند اليونان غير مسبوق فى تاريخ غيرهم .

الواقع إن السر في قيام تلك المعجزة هو إدراك اليونانيين دون غيرهم من الشعوب القديمة لفكرة العلم كحجة أو برهان على صدق قضية ما صدقا عاما أى فى كل التطبيقات الجزئية التى تصادفها، وذلك بدلا من الاكتفاء بوصفات عملية وقواعد تقريرية غير أكيدة كما فعل قدماء المصريين. لقد كان اليونانيون ككل شعوب حوض البحر الأبيض المتوسط شعبا يحب الجدال والمناظرة. ولكنهم امتازوا ببيئة سياسية لم تتح لغيرهم، فيها تنافس شديد بين المدن التى تريد كل واحدة منها السيطرة على غيرها وعلى البحار والتجارة، كما فيها أيضا حرية فكرية تسمح بتنافس حر طليق بين أفراد المدينة للسيطرة على مصائرهما. وهذا كله مما جعلهم ينمون ملكة النظر العقلى وفنون البلاغة والخطابة والدراما والفلسفة والسفسطة وغيرها من وسائل التأثير على الجماهير، فأدى بهم كل ذلك إلى التنبه إلى فن الجدال والمناظرة والمنطق، وبالتالي إلى اكتشاف فكرة العلم ذاتها كحجة أو برهان. هكذا ظهرت فروع المعرفة المختلفة عندهم وعلى رأسها الرياضيات التى تبرز فيها العقلية النظرية البرهانية إلى أبعد حد. وذلك منذ أقدم مفكريهم الذين حفظ لنا التاريخ ذكرهم أمثال طاليس وفيثاغورس. والأول منهما هو الذى حسب ارتفاع الهرم الأكبر بقياس ظله عندما يكون ظل كل شئ مثله. أما الثانى فهو معلم الإنسانية

كلها فكرة العلم بإنشائه الرياضيات وإلى مدرسته ينتسب رياضيو اليونان .

إن التفكير الرياضى الذى بدأ بفيثاغور فى القرن السادس قبل الميلاد تميز بظاهرتين: أولاهما أنه امتزج دائما بنظرات ميتافيزيقية زائدة على حاجات الرياضة نفسها وهكذا ذهب فيثاغور (أو تلميذه فيلالاوس) - كما يروى أفلاطون وأرسطو - إلى أن كل شىء فى الوجود هو شكل هندسى وعدد، ويشف هذا التصور الميتافيزيقى الرياضى للوجود عما وصل إليه الذهن اليونانى منذ بداياته من مراحل التجريد العقلى أو العلمى الذى أفرغ العالم من كل مادته الظاهرة مستبقيا أشكالاً هندسية وأعداداً. وواضح أن مثل هذا التجريد للمكان والأعداد الذى لا تقوى عليه الشعوب البدائية أو شعوب حضارات ما قبل العلم كما رأينا، إنما هو شرط أول لتكون الفكر الرياضى الذى يسبح دائماً فى مكان متجانس الأجزاء وأعداد مباحنة للمعبودات .

أما الظاهرة الثانية فهي أنه عُنَى بحل وبرهان مسائل متفرقة من الرياضة وإن لم يُعَنْ بربط وتنسيق تلك المتفرقات فى نسق علمى موحد تتسلسل فيه النظريات كما هو الشأن فى الرياضيات الآن، ولكنه فى حله وبرهانه تلك النظريات إنما أبرز لنا بكل تأكيد فكرة

المعرفة العلمية علي حقيقتها لأن العلم استدلال على قضية ما . وهكذا برهن فيثاغور لأول مرة في التاريخ النظرية الوحيدة التي تنسب إليه في الهندسة القائلة بأن المربع القائم على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي مجموع المربعين المقامين على الضلعين الآخرين وذلك في كل الحالات الممكنة لتطبيقها، وبغض النظر عن أطوال الأضلاع المعينة التي وقف عندها المصريون والهنود إذ لم يدركوا تلك النظرية كما رأينا إلا تطبيقين اثنين لها . وهذا البرهان الفيثاغوري المعروف في كتب الهندسة كفيل وحده بأن يضع صاحبه فوق هامة العلم والطريقة العلمية، لما تكشفه عن اتجاه عقلي غير مسبوق ولفتة مبتكرة إلى تصور العلم كقضية لا تقبل في مدينة العلم إلا مقترنة بالدليل على صحتها صحة عامة تنطبق على كل الجزئيات التي نصادفها لها في التجربة .

إن الفارق الكبير بين الموقف العلمي **فيثاغور** في برهانه لنظريته والموقف العلمي عند المصريين والهنود هو أن نظرية **فيثاغور** تثبت علاقة هندسية عامة بين المربعات المقامة على أضلاع مثلث قائم الزاوية بحيث لا تتوقف تلك العلاقة على قياس معين لأضلاع المثلث كما عند المصريين والهنود بل بالعكس من ذلك تكون أسلوبا أو مبدأ عاما لقياس تلك الأضلاع في كل احتمالاتها الممكنة، إذ يمكن

التساؤل مثلاً عن طول الوتر عندما يكون الضلعان المجاوران للزاوية القائمة هما خمس وحدات وسبع، ففي هذه الحالة يكون المربع المقام على الوتر هو $(٢٥ + ٤٩ = ٧٤)$ ولكن نلاحظ الآن أن العدد الدال على مربع الوتر وهو ٧٤ إذا أردنا أن نستخرج منه طول الوتر مقدراً بوحدات محددة وذلك باستخراج جذره التربيعي نجد أنه لا جذر تربيعي له بالأعداد الصحيحة إذ أن جذره التربيعي عدد لا ينتهي في كسوره واقع بين (٨ ، ٩) وبهذا نجد أنفسنا أمام عدد غريب لأنه غير محدد أى غير قابل للقياس بوحدات معقولة مما يقاس به الضلعان الاخران.

فهناك إذن بسبب هذا العدد عدم تناسب أو عدم تقايس عددي بين أضلاع المثلث مما عرف منذ ذلك الوقت بالأعداد غير المتقايسة Incommensurables وهذا أول ما اكتشف من الأعداد غير المعقولة Irrational.

إن مؤلفي العرب القدماء اصطالحوا على أن يطلقوا على هذا العدد غير المعقول اسم العدد «الأصم» وهو الذى لا ينتهى جذره التربيعى إلى أعداد محصورة (مثل $\sqrt{2}$) مثلاً ، كما أطلقوا على العدد الذى يقبل عملية الجذر التربيعى فى أعداد منتهية العدد «المنطوق» .

وهكذا نرى كيف اصطدمت نظرية فيثاغور الهندسية منذ بدايتها بعقبة كُداءً، هي ظهور أعداد صماء. فعندما انتقل فيثاغور من الهندسة إلى الحساب العددي لقياس أطوال الأضلاع ظهرت له هذه المشكلة غير المتوقعة، تلك الأعداد الصماء التي لا يقابلها شكل هندسى ما، سواء فى تربيعها لتكون مربعاً قابلاً للقياس على ضلع من أضلاع المثلث أم فى جذرها التربيعى لتكون مستقيماً يقاس من أضلاع المثلث بعدد منطوق على حد سواء. فتساءل كيف لا تستقيم نظريته الهندسية بالنسبة إلى الكثير من الأعداد وهى الأعداد الصماء، واعتبر ذلك «فضيحة» كتمها إلا عن تلاميذه وأوصاهم بأن لا يكشفوا سرها لئلا يصيبهم شر. وهكذا اتخذت الفيثاغورية هيئة جمعية سرية عرفها التاريخ القديم طويلاً، وعلى غرارها قامت جمعيات سرية فى التاريخ القديم والحديث ومنها إخوان الصفاء فى الحضارة الإسلامية.

إن تلك الفضيحة أو بالأحرى عجز الطرق الحسابية الذى كشف عنه وجود مثل تلك الأعداد الصماء منذ الخطوات الأولى للرياضة فى الحضارة اليونانية، يبين سبب عدم الركون إلى علم العدد أو الحساب فى حل المشاكل الرياضية فى تلك الحضارة وبالتالى عدم تطوره إلى جبر وتحليل. ومن ثم تأخرت منزلة الحساب فى العالم القديم وتقدمت

عليه الهندسة وقامت كعلم ناضج منذ البداية وخضع الحساب نفسه إليها. وحتى عند الفيثاغوريين أنفسهم نشاهد إخضاع علم العدد أو الحساب إلى الهندسة من أكثر من جهة .

أولا من جهة أن فيثاغور وتلاميذه لم يتراجعوا أمام مشكلة الأعداد الصماء فحاولوا التغلب عليها علي الوجه الآتى : حاولوا بالاستقراء جمع كل ثالوث من الأعداد الصحيحة (المعبرة عن أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية) لا يؤدي إلى عدد أصمّ. وفي ما يختص بالأعداد التي يؤدي جذرها إلى عدد أصمّ، حاولوا أن يحددوا ذلك العدد بوضع أقرب سلسلتين إليه من الأعداد الكسرية، إحدهما بالزيادة وأخرها بالنقص فيقع العدد الأصم بينهما.

أما الجهة الثانية لإخضاع العدد إلى الهندسة فناتج عن رمزهم للأعداد الحسابية بالنقط كما هو الأمر الآن فى ترقيم أوراق اللعب مثلا، وكانوا يرتبون تلك النقط في أشكال هندسية كالمستقيم والمثلث والمربع والخمس والكثير الأضلاع فيحصلون بذلك على الأعداد المستقيمة والمثلثة والمربعة وهكذا. أعنى يحصلون دائما على أشكال هندسية، وابتداء من هذه الأشكال يتوصلون إلى الأعداد إذ قد وضعوا قواعد لكل شكل منها للحصول على ترتيب النقطة الأخيرة فيه الدالة على عدد الشكل مهما كان امتداده وكبره. وإنه لمن السهل

إدراك القاعدة العامة التى تعرف بها قيمة العدد (ن) فى أي شكل هندسى فهى على سبيل المثال فى العدد المثلث (ن + ١) وفى العدد المربع (ن^٢) وهكذا .

ولقد درسوا خصائص الأعداد فميزوا الأعداد الأولية والأعداد الصماء والأعداد المنقسمة بالنسبة لكل عدد. وجاء من جمعهم لقواسم كل عدد أنهم ميزوا العدد المخصب أو المكثّر وهو الذى يزيد مجموع قواسمه على العدد نفسه. ثم العدد المجذب أو المقل وهو الذى يقل عن مجموع قواسمه، ثم العدد الكامل وهو الذى يتساوى ومجموع قواسمه. مثل هذه الأبحاث التى شغف بها الفيثاغوريون فى الأعداد والتى عرفتها الكتب العربية القديمة لم تؤد إلى نظريات علمية ولم تستبقها الرياضه الحديثه وإن كانت مع ذلك لا تخلو من طرافه وعمق، ففيها مسائل لم تستطع الرياضه الحديثه حلها: فإن المسألة الفيثاغورية هى هل يوجد عدد فردى وكامل معا؟ مسألة لم يجد الرياضيون المحدثون لها بعد حلاً، كما أنهم لم يبرهنوا على امتناع وجود مثل ذلك العدد .

ولاشك أن الفيثاغوريين لو اتخذوا رموزاً للأعداد غير الأشكال الهندسية لتوصلوا كما يقول ديرفوس (Dryfus) إلى نتائج مخالفة بالمره .

إن الذى نود أن نخلص إليه مما تقدم هو أن علم الأشكال أو الهندسة كان العلم الرياضى الذى نضج منذ البداية والذى كانت تحل بواسطة مشكلات الرياضة اليونانية وإليه أخضع الحساب . وحتى فى حضارة العصر الإسكندرى الذى ورث اليونان والشعوب القديمة الأخرى والذى ابتدأت الرياضيات فيه بأخطر كتاب فى الرياضة القديمة وهو «الأصول» لأقليدس، نجد أن علم الهندسة هو موضوع الكتاب الأساسى وأن علم الحساب ألحق بها كإخبر فصل من فصولها ومشتق منها .

حقيقة لقد انقلبت الأوضاع الرياضية منذ القرن السابع عشر بعد أن ظهر الجبر الحديث الذى هو تعميم للحساب ثم بعد أن ظهرت الهندسة التحليلية التى هى معالجة للمشاكل الهندسية بالطرق الجبرية، فأصبح علم التحليل الجبرى بنظرياته فى الدوال الرياضية المختلفة العلم الذى له الغلبة على علم الأشكال الهندسية، بل تراجعت هذه شيئا فشيئا حتى لم تعد هناك أشكال فى الهندسات المعاصرة وإنما النظر كله فيها منصب على أعداد فحسب بل وعلى تصورات منطقية خالصة، فاختلفت بذلك مكانة الهندسة فى العصر الحديث إذ أصبحت مسودة بعد أن كانت سائدة، وأصبح التحليل الجبرى وبالتالى العدد سائدا بعد أن مسوداً، إلا أنه رغم هذا الانقلاب

والتطور فإن المنهج الذى اتبعه **أقليدس** أو بالأحرى المسائل المنهجية التى تضمنتها هندسته والتي أسهم الفيلسوفان - **أفلاطون** وبخاصة **أرسطو** - فى إرساء أسسها وإضاعتها حتى صارت هندسته مثالا علميا يحتذى طوال العصور. هذه المسائل المنهجية هى بعينها المسائل التى أثّرت أخيرا بالنسبة إلى الرياضة الحديثة فى وضعها الجبرى. وهذه المسائل كما سنرى متشعبة أشد التشعب ويؤلف مجموعها المسائل التى ستعنى بها فلسفة الرياضة التى هى موضوع هذه الدراسة. ولذلك نتوقف الآن عند النظر فى المنهج الذى اتبعه **أقليدس** فى «الأصول» ونبدأ منه للنظر فى إلقاء ضوء على كل الأبحاث المعاصرة فى أسس الرياضة بقسميها: الهندسة والتحليل.

الفصل الثالث

تعاون بين الفلسفة والرياضة منذ القدم في سبيل تأسيس علم رياضي وثيق

(٧) لا يديل في الرياضة عن منهجها .

(٨) تعريف الرياضة بمنهجها .

(٩) تحليل أرسطو لأسس الهندسة وتطبيق أفليدس لهذا التحليل

في إقامة نسق استنباطي للهندسة .

(٧)

عندما انطفأت حياة **الأسكندر الأكبر** انتقل مركز الحضارة الفكرية من أثينا إلى الإسكندرية حيث أنشأ **بطليموس الثاني** فيلادلف بناءً ضخماً سماه المتحف، ابتاع له نفائس مكتبات أثينا ومنها مكتبة الليسيه التي جمعها أرسطو. وجعله فى آن واحد مكتبة ومعهداً للدراسة وأكاديمية للعلماء الذين اجتذبهم من أطراف العالم شرقاً وغرباً يعيشون بين جدرانها وعلى نفقة الدولة. وفى قاعاته الفسيحة المزدهمة بأوراق البردى انتشر المؤلفون والنُساخ والمترجمون ينقلون تراث الماضى ويهذبونه ويجددون فيه.

نحن الآن فى عام ٣٠٠ ق . م، حيث نجد بين هؤلاء العلماء رجلاً أحكم الصمت عن حياته حتى جهلنا كل شىء عن أصله وسيرته ومولده ووفاته. ولا نعلم من كلماته الماثورة غير تلك الكلمة التى أصبحت مثلاً فى الكتب الأوروبية والتى ارتاعت لها حاشية الملك وذلك حين سأل الملك فى إحدى زيارته للمتحف رجلاً ينظر فى أشكال هندسية رسمها فوق الأرض هو **أقليدس** بقوله : ألا تعرف طريقاً آخر لإتقان الرياضيات وامتلاك ناصيتها غير طريقك فى كتابك «الأصول»؟ (Elements) فأجابه **أقليدس** بأنه «لا يوجد فى الرياضيات طريق ملكى» وهو يعنى أن للعلم طريقته التى تفرض

ذاتها على كل من يطلبه والناس سواسية فيها . ولم يغضب **بطليموس** مع أن البطالة اشتهروا بسفك الدماء لأتفه الأسباب فقد كان يعمل على توطيد ملكه بإنشاء صروح للفن والعلم التي تخذل أسرته . وفيما يختص بعلم الرياضة بالذات توصل **بطليموس** ولا ريب إلى هدفه منذ إنشاء المتحف فإن كتاب «الأصول» في الهندسة **أقليدس** هو من الوجهة العلمية البحتة أوثق الكتب كلها التي انحدرت إلينا من الفكر القديم وأكثرها تداولاً بعد الإنجيل عند الغربيين طوال العصور كما يلاحظ مؤرخ الرياضة **كوليروس** Colerus الذي قال كذلك إنه طبع أكثر من ١٥٠٠ طبعة بلغت نسخ بعضها أرقاما خيالية .

وسر النجاح المنقطع النظير لمؤلف **أقليدس** هذا عبر العصور لا يرجع إلى ابتكار **أقليدس** لنظريات جديدة ومتفرقة كما كان يفعل الفيثاغوريون من قبل وإن كان **أقليدس** فقد ابتكر فعلاً وأضاف نظريات رياضية في مؤلفات أخرى له - وإنما يرجع سر نجاحه إلى الطريقة أو المنهج Methode الذي اتبعه في كتابه «الأصول» في استعراض النظريات المبعثرة المتناثرة المعروفة عند الفيثاغوريين السابقين، وذلك بتنسيقها في نسق علمي موحد محكم الحلقات بحيث يتوقف فيه برهان كل نظرية لاحقة على نظريات أخرى سبق برهانها وسابقة عليها في داخل بناء منطقي يجمع كل النظريات المتفرقة ويستند بحذافيره إلى أسس أو مقدمات أو كما يقول هو إلى

«أصول» محددة قليلة ووثيقة تبقى خارج البرهان لم يظن الرياضيون إليها من قبله.

فى الواقع كان الرأى الرياضى العام قد ضج بالفضائح الرياضية من النوع الذى صادفناه وزهد فى ابتكار نظريات جديدة تتعرض إلى الهدم والإنكار على أساس حجج سفسطائية بل كان قد سئم مثل تلك الترهات. وتطلع إلى إيجاد حل حاسم لإقامة علم رياضى موحد جدير باسم العلم. إذن كان الزمن قد نضج ليثمر **أقليدس**. وكانت رسالة أقليدس أن يخرج ذلك العلم، إلى حيز الوجود وأن يكون سر نجاحه فى تأسيس ذلك العلم، الطريقة أو المنهج الذى اتبعه فى تنسيق نظريات الرياضة المتفرقة وربطها برهانيا بحيث يستنبط بعضها من بعض. وهذه الطريقة المثلى التى أثمرت الرياضيات كلها حتى اليوم هى التى تساءل **بطليموس** عن إمكان بديل لها، فلم يجد عنها بديلا للملوك .

ها نحن نقف فجأة فى فلسفة الرياضة أمام فكرة «المنهج» الذى أثمرها كعلم، فإلى هذا المنهج تحول النظر منذ الآن وتكرس الانتباه ذلك لأن تحليل خطوات ذلك المنهج لبيان الأسس والأصول التى تقوم عليها الرياضة ونقد تلك الأسس وما يترتب عليها من قضايا رياضية هى المسائل التى تتناولها فلسفة الرياضة وتجب عليها .

(٨)

ونحن عندما ننثير فكرة المنهج فى الرياضة يجب أن نعود أدراجنا إلى الورا، إلى ما قبل أقليدس نفسه، أعنى إلى الفلاسفة - لا إلى الرياضيين طبعاً- الذين مهدوا ولا ريب لأقليدس فى منهجه الذى اتبعه لبناء علم رياضى. فهنا نلمس التعاون الوثيق الذى نشأ بين الفلسفة والرياضة ليس فقط فى مجال فلسفة الرياضة التى هى فلسفة. وإنما فى إقامة الرياضة ذاتها كعلم وثيق وذلك بفضل التحليل الفلسفى لأسس الرياضة .

وفى تلك العودة نمهد بتعريف للرياضيات على أسس منهجها كما يعرفها المحدثون.

لقد سبق أن عرفنا الرياضيات على أساس موضوعها وهو التعريف التقليدى لها الذى يقول إنها علم الكم والمقدار، أو علم الكم المتصل (الهندسة) والكم المنفصل (العدد) .

وألاحظ الآن أن هذا التعريف «بالموضوع» يعتبر اليوم غير صالح للتعبير عن طبيعة الرياضة ككل منسجم متسق يضم فروعاً عديدة لا يدخل بعضها بكل تأكيد تحت مقولة الكم أياً كان لأن من فروعها أو موضوعاتها ما لا يمت للكم متصلاً أو منفصلاً بصلة. وربما كان سابقاً لأوانه بيان أن هندسة كهندسة الوضع (Geometry of Situa-

tion) أو الحساب الهندسى عند جراسمان أو جبر المنطق عند جورج بول أو غير ذلك من النظريات الرياضية الحديثة لا حديث فيها عن الكم مع أنها نظريات رياضية .

لذلك فإن الاتجاه الحديث للتعبير عن طبيعة الرياضة ينحو نحو تعريفها تعريفاً يتمشى مع كل فروعها كما يتمشى معها ككل منسق تتوقف فيه نظرية رياضية على نظرية أو نظريات أخرى. وهذا التعريف إنما هو تعريف لها بطريقتها أو منهجها لا بموضوعاتها التى تتناولها. إلا أن تعريف الرياضة بمنهجها على هذا النحو يكشف فى الوقت نفسه عن طبيعة موضوعها كما يتصوره المعاصرون الذين تخلوا عن التصورات القديمة للكم متصلاً ومنفصلاً كموضوع للرياضة. لكن هذا التعريف للرياضة على أساس منهجها إنما يحتاج إلى مقدمات لكى يفهم، لأنه لما كان يتصور الحديث لطبيعة الرياضة والتحول إلى الإتمام بمنهجها إنما نشأ عن حركة النقد الداخلى التى قام بها رياضيو القرن التاسع عشر لتصوراتهم الرياضية التقليدية وكانت نقطة انطلاق تلك الحركة إحدى مسلمات هندسة أقليدس التى حاول الرياضيون عبثاً البرهان على صحتها كنظرية من النظريات فكشفوا بفشلهم المتكرر عن عوالم هندسة أخرى غير عالم أقليدس. ثم لما كان الكلام فى مناهج الرياضة قد

سبق إليه أرسطو وأقليدس المحدثين من الناظرين فى هذا الموضوع فإنه يجب أن نقف عند مذهب هذين المفكرين القديمين قبل أن نتناول موضوع النقد الداخلى للرياضة فى القرن الماضى الذى أثار موضوع فلسفة الرياضة فى الفكر المعاصر بكل ما فى هذا الموضوع من مواقف متعارضة متضاربة وحية.

(٩)

إن معرفة أرسطو رياضيات عصره، ودوره وعلماء الليسيه فى تقدمها وجمعها، وبصفة أخص تحليله هو نفسه لأسسها وأصولها مما تجمعه كلمة المنهج الرياضى، أمر لا مجال لشك فيه وهو ما يدل عليه على الأقل كتابه المسمى «التحليلات الثانية» الذى تناول فيه البرهان اليقيني أو بصفة أخص الرياضى من حيث صلة هذا البرهان بالمنطق الصورى. فبين أن اليقين الذى تمتاز به قضايا الرياضة ونظرياتها إنما هو مستمد من أنها علم برهانى (Demonstrative Science) أو كما يقال الآن علم استنباطى (Deductive Science) أو نظرية أكسيوماتيكية (Axiomatic Science).

والعلم البرهانى عنده هو العلم الذى يحتاج لقيامه كعلم إلى نقط

بدء أى أسس أو مبادئ يبدأ منها برهان قضاياه ونظرياته. وتلك الأسس أو المبادئ قليلة العدد وغير قابلة للبرهان فى العلم الرياضى نفسه وإن كانت تبرهن فى علم أعلى كالميتافيزيقا التى هى علم المبادئ الأولى للوجود ومنها مبادئ الرياضيات طبعاً.

من هذه المبادئ ما هو مشترك بين العلوم كلها كالمبادئ الأولية الثلاثة للوجود والفكر وهى الهوية وعدم التناقض والثالث المرفوع . ومنها ما هو خاص بكل علم على حدة. وأهمها فيما يختص بالرياضيات ما يأتى :

١- التعريفات وهى قضايا تشرح معنى الحدود الأولية ولا يقال لها صادقة أو كاذبة، كتعريف الخط مثلاً بقولك إنه طول لا عرض له.

٢- الأصول الموضوعية (Oxiomes) أو الأوضاع المتفق عليها وهى ما ترجمه العرب بعبارة «العلوم المتعارفة». وهى قضية لا برهان عليها. وواضحة فى ذاتها، حتى لكأنما الإنسان يعرفها دائماً إذا ذكرت أمامه كما أنه لا غنى عنها لمن يريد التعلم. ومثالها قولك : (الكل أكبر من الجزء) .

٣- المسلمات Postulats وهى ما نقله العرب فى كلمة «المصادر» وهى أيضاً قضية لا برهان عليها ولكنها تختلف عن

الأصل المتواضع عليه في أنها ليست بينة في ذاتها ويجد المتعلم عنادا في قبولها ومن ثم فهو يصادر بها ، حتي تتضح له فيما بعد ومثالها : المتوازيان لا يتلقيان مهما امتدا .

كل هذه المبادئ لا تبرهن في العلم الذي يستند إليها وإنما في علم أعلى كالفلسفة الأولى، ولكنها المبادئ التي تستمد منها براهين النظريات الرياضية سواء مباشرة أو مما سبق برهانه من النظريات بواسطتها .

إن مثل هذا التحليل الأرسطي غير المسبوق في تاريخ الفكر الذي أوجزته هنا إنما يشهد بعناية هذا الفيلسوف الكبير بفلسفة العلوم منذ القدم ويشهد أكثر من هذا بأن هذا المؤلف الذي جعل من الليسيه معهدا لدراسة تاريخ العلوم والإسهام في تقدمها كان أسبق من الرياضيين في فحص مسألة مصادر اليقين الرياضى بفحص الأسس التي يقوم عليها البناء الرياضى كله. كما أنه وضع حجر الزاوية لتعاون لم ينفصم منذ ذاك الوقت بين الفلسفة والرياضة فأنشأ بذلك منذ القدم فلسفة الرياضة التي هي مجال هذا التعاون الدائم المثمر بين العلمين. لكنه لم يذهب إلى أبعد من هذا التحليل الرائع في حد ذاته، فلم يقم نسقا رياضيا على هذه العناصر التي ميزها، بل ترك الرياضة نظريات مبعثرة وغير مؤتلفة في بناء موحد

كما هو الشأن عند الفيثاغوريين.

وفيما يلي فقرات من كتاب النجاة (ص ١١٢) للفيلسوف الإسلامي ابن سينا توضح ما أوجزناه عن أرسطو.

يقول ابن سينا : « الأصول التي تعلم قبل البرهان ثلاثة : حدود وأوضاع ومقدمات.

فالحدود تفيد تصور ما لا يكون بين التصور من موضوعات الصناعة... مثل أن النقطة طرف لا جزء له، والخط طول لا عرض له، والسطح كذا.. وليست تفيد تصديقا البتة ولا فيها إيجاب ولا سلب.

وأما الأوضاع فهي المقدمات التي ليست بيئة في نفسها ولكن المتعلم يراود على تسليمها وبيانها في علم آخر وإما بعد حين في ذلك العلم بعينه، مثل ما نقول في أوائل الهندسة أن لنا أن نصل بين نقطتين بخط مستقيم. ولنا أن نعمل دائرة على كل نقطة وبقدر كل بعد، ومثل أن الخطين إذا وقع عليهما خط مستقيم فكانت الزاويتان اللتان من جهة واحدة أقل من قائمتين فإن الخطين يلتقيان من تلك الجهة.

فما كان من الأوضاع يتسلمه المتعلم من غير أن يكون في نفسه له عناد سمى أصلا موضوعا وما كان يتسلمه مسامحا وفي نفسه له عناد يسمى مصادرة...».

أما أقليدس الذي يكاد يكون معاصرا لأرسطو فقد كان كتابه المسمى «الأصول» دائرة معارف لما وصلت إليه رياضيات القدماء. فقد جمع فيه نظريات القدماء المبعثرة التي ظهرت في القرون الثلاثة السابقة عليه ونسب بعضها إلى مكتشفها وقدم الهندسة على نظرية الأعداد (الحساب) واشتق هذه الأخيرة من الأولى متأثرا بالفيثاغوريين. ونسق هذا كله ولأول مرة في التاريخ في نسق أو بناء واحد محكم الحلقات بحيث يستند برهان كل نظرية لاحقة إلى ما تقدم عليها في الترتيب داخل ذلك البناء وبحيث يستند النسق كله إلى تلك المقدمات أو المبادئ التي ميزها أرسطو في تحليلاته الثانية، ولا يمكن فهم أقليدس أو العمل الذي أنجزه في كتاب الأصول إلا في ضوء تعاليم أرسطو في هذه التحليلات فحقق كتابه بفضل تأثير أرسطو أوثق علم انحدر عبر العصور من العالم القديم. ونحن لا نستطيع أن نحدد كيف تأثر أقليدس بـ أرسطو ولا كيف أخذ عنه ولكن الأثر أكيد وواضح.

وكما بين أرسطو في تحليلاته كل نظرية يقينية أو برهانية إنما تقوم على قبول عدد قليل من المقدمات أو المبادئ تبدأ من البرهنة على كل القضايا القابلة للبرهان بينما تبقى تلك المقدمات خارج

البرهان وغير قابلة له فى نطاق العلم القائم عليها . وهذه المقدمات عند أقليدس هى :

١- التعريفات أو الحدود. وأعطى أقليدس ٢٣ تعريفا أو شرحا

للحدود منها على سبيل المثال :

- النقطة ما ليس له بعد.

- الخط طول لا عرض له.

- المستقيم هو الخط المشابه لنفسه. الخ...

٢- المسلمات أو المصادرات وهى تختلف عن معناها عند أرسطو

لأن أقليدس يعنى بالمسلمات أن أشكالا معينة هى أشكال ممكنة، ومن هذه الأشكال :

- مد خط مستقيم بين نقطتين.

- مد مستقيم إلى ما لا نهاية.

- كل الزوايا القائمة متساوية.

- إذا قطع مستقيم مستقيمين آخرين بحيث كان مجموع

الزاويتين الداخلتين الموجودتين من جهة واحدة أقل من قائمتين فإن

المستقيمين المذكورين أو امتدادهما يتلاقيان.

(وتسمى هذه بقضية المتوازيين أو بالمسلمة الأقليدية الخامسة).

٢- الأصول الموضوعية أو العلوم المتعارفة وهى المعارف المقبولة

عامة أى البديهية، وقد قبل **أقليدس** ٢٨ قضية من هذا النوع منها :

- الأشياء المساوية لشيء بالذات متساوية فيما بينها.

- الكل أكبر من الجزء .. الخ.

وعلى أساس هذه الأنواع الثلاثة من المقدمات أو المبادئ أو الأصول يبرهن **أقليدس** عددا كبيرا من القضايا المبرهنة. أى المشتقة بالبرهان، وهى إما نظريات Theoremes أو ملحقات Corolaires أو تمارين مشهورة..

وقد حلل **أقليدس** بالإضافة إلى هذا خطوات برهان كل نظرية على حدة فذكر ثمانى خطوات منها :

(١) ذكر منطق النظرية Enonce

(٢) إعادة المنطوق مع الاستعانة بشكل مرسوم (Ecthese)

(٣) افتراض التسليم بصحة القضية (Epagoge) فيستعان

بقضية أخرى سلم بها أو تم برهانها.

(٤) ثم الأشكال الإضافية أو انشاء الأعمال (Construction)

وهو عبارة عن تحليل القضية التى يراد برهانها إلى أشكال أخرى مألوفة وأبسط منها الخ.. الخ.. حتى الخطوة الثامنة والأخيرة وهى إعلان النتيجة .

كل هذه الخطوات التي يمارسها فعلا الذين يقومون بالبرهان كانت معروفة قبله عند قدماء الهندسيين، وينسب أفلاطون إلى نفسه اكتشاف بعضها في محاوراته. ولكن أهمية أقليدس لا ترجع إلى مثل تلك الخطوات العملية التي تتبع في الحل وإنما فقط إلى أنه استنادا إلى تحليلات أرسطو الثانية استطاع أن يبنى نسقا استنباطيا واحدا لكل النظريات المبعثرة التي خلفها السابقون تستنبط في داخله النظريات اللاحقة مما سبقها في الترتيب ويستند الاستنباط برمته إلى قبول عدد محدود من المقدمات أو الأصول كما قدمنا.

ولما كنا سنتناول بالتفصيل طبيعة «النسق الاستنباطي» هذا عند المحدثين الذين يعرفون الرياضة بالإشارة إلى هذا المنهج وحده. فيجب أن نميز منذ الآن التصور المشترك بين أرسطو وأقليدس لهذا النسق.

نعلم الآن بعد الذي تقدم أن النسق الاستنباطي عندهما إنما يقوم على استخلاص مقدمات أو قضايا أولية أهمها الأصول الموضوعية (Axiomes) والمسلمات أو المصادرات (Postulats) ولا فارق بين النوعين إلا في درجة الوضوح والبداهة لدى المتعلم : فالأولى أوضح بينما يعاند العقل في قبول الثانية ويتقبله متسامحا وحسب. فإذا أغفلنا هذا الفارق السيكلوجي أو البيداجوجي

(التعليمي) فإن تلك القضايا الأولية تعتبر مطابقة للواقع ومعبرة عنه، أعنى تعتبر في ذاتها أنها «حقيقية» فالحقيقة هي في المطابقة التامة مع الخارج أو العالم الواقعي. هذا بكل تأكيد هو موقف **أرسطو** و**أقليدس** المشترك، والفيلسوف **كانط** (Kant) لم يتردد في تأييد مثل هذا الرأي على نحو يختلف بعض الشيء عندما نظر إلى تلك القضايا الأقليدية الأولية على أنها قضايا «ضرورية» (Necessaires) لأنها تعبر عن خواص المكان الحقيقي الوحيد. وإن كان هذا المكان عنده ذاتيا في ذهن البشرى وليس واقعا في العالم الخارجى كما عند **أرسطو** و**أقليدس**، وهذا هو الفارق بين الموقفين، ولكن هذا الفارق لا يؤثر في كون تلك المبادئ الهندسية هي قضايا حقيقية لأنها معبرة مباشرة عن خصائص المكان سواء أكان في الخارج (أقليدس) أم في باطن ذهن (كانط)، فالخط يمتد عند **كانط** إلى ما لا نهاية والكل أكبر من الجزء والتوازيان لا يلتقيان.. الخ..

والمناطق المعاصرون عندما يتحدثون عن التصور المشترك بين **أرسطو** و**أقليدس** الخاص بطبيعة النسق الاستنباطى بقصد تمييزه عن تصور المحدثين يصفونه بأنه «نسق يقينى استنباطى» *Susteme Categoricalo* (انظر قاموس لالاند) والمقصود بهذه التيمة إبراز كلمة

«يقينى» التى تشير إلى الفكرة المميزة حقيقة لتصور القدماء وهى أن المقدمات أو المبادئ التى يستند إليها النسق «يقينية» أى مطابقة للواقع الخارجى وتبعا لذلك تكون أيضا القضايا المشتقة منها بالبرهان (النظريات) يقينية كذلك. ولذلك حكم مفكر مثل كانط بأن الهندسة الأقليدية هى الوحيدة الممكنة للإنسان لأن قضاياها ضرورية.

لكن التصور المعاصر للنسق الاستنباطى لا يرى هذه المطابقة ولا هذه الضرورة إذ يعتبر القضايا الأولية مجرد فروض Hypotheses أو أوضاع تتواضع عليها ولا صلة لها بالواقع الخارجى أو المكان كما أنها ليست ضرورية عند الذهن. وكل ما تمتاز به هو أنها يجب أن تكون غير متناقضة فيما بينها بحيث يمكنها أن تنتج طائفة من القضايا المشتقة أو النظريات التى لا تتناقض فيما بينها. وهذا التصور لا يسمح بالطبع بالتمييز بين مسلمات أو أصول موضوعة فكلها مجرد فروض أو أوضاع نتفق عليها، ومن ثم جاء اسمه، فالمناطق المحدثون يصفون هذا التصور الجديد بأنه «نسق فرضى استنباطى» Systeme hypothetico - deductif (بيانو ومدرسته فى إيطاليا) أو Postulational System (أمريكا) أو Axiomatique

(هلبرت ومدرسته فى ألمانيا) وكلها عبارات بمعنى واحد هو أن المبادئ افتراضات، وكلها تعريف للرياضيات بمنهجها ومن وجهة نظر المحدثين.

إن هذا التصور الجديد للنسق الاستنباطى هو الذى جعل الرياضيين المحدثين يتكشفون عن أوجه النقص الشديد فى نسق أقليدس الهندسى فقد تبين الرياضيون أن نظريات أقليدس لا يمكن أن تنتج عن مقدماته الأولية وحدها لأن تلك المقدمات ناقصة نقصاً ذريعاً .

فإمام الرياضيين فى مطلع هذا القرن وهو هنري بونكاريه Prin-care بين نقص المقدمات الخاصة بالنقلة (Displacement). والرياضى الألمانى مورتز باش (pach) الذى عاش فى آخر القرن الماضى بين كيف أن هندسة أقليدس تنقصها المقدمات الخاصة بالترتيب أو النظام Axiomes D'ordre وبين الفيلسوف المنطقى برتراند راسل Russell كيف أن الثمانى والعشرين نظرية الأولى من كتاب أقليدس تستعمل ضمناً لا صراحة، عدة مقدمات مضمرة لم ينص عليها فى ثبت مقدماته. وكان ديفد هلبرت (Hilbert) شيخ الرياضيين فى ألمانيا حتى قبل الحرب الثانية أول من كمل وأتم

أكسيوماتيك هندسة أفقليدس فى كتابه المسمى أصول الهندسة (١٨٩٩) وهذا النقص كله لمّا يبرر قول برتراند راسل بأنه لم يكن قبل ديفيد هيلبرت برهان هندسى واحد سليم. أى يستنبط نتائجه بدقة من المقدمات المصرح بها فى بداية الهندسة ودون اللجوء إلى مقدمات أخرى مضمرة فى ذهن الهندسى.

خلاصة هذا كله تعاون بين الفلسفة والرياضة فى الكشف عن منهج الرياضة. تعريف للرياضة من حيث منهجها بأنها نسق استنباطى. اختلاف بين القدماء والمحدثين فى قيمة قضايا هذا النسق أى حقيقية وضرورية أم هى مجرد افتراضات وأوضاع. نقص ذريع فى تحليل أفقليدس لأصول الهندسة وتدارك هذا النقص عند الرياضيين المعاصرين.

الفصل الرابع

من النقد الداخلى فى الهندسة إلى الأكسيوماتيك الحديث

- (١٠) حركة النقد الذاتى فى الهندسة ونشأة هندسات كثيرة فى القرن التاسع عشر .
- (١١) معنى « الحقيقة » الرياضية الجديد ضد نظرية كانط فى أسس الرياضة .
- (١٢) حركة تأسيس المسلمات فى الهندسة (الأكسيوماتيك) تباعد عن « الحدس » وتلتقى بالمنطق الصورى
- (١٣) اقتراح لبوانكاريه يؤكد مدى ابتعاد مسلمات الهندسة عن الحدوس أو الأشكال .
- (١٤) الشروط المنطقية لتأسيس المسلمات عند الرياضيين المعاصرين .

ننتقل الآن من الفكر القديم إلى الفكر الحديث في مناهج الرياضة. فلقد مهدنا بفكرة عن مناهج الرياضة عند أرسطو وأقليدس لأننا سنجد أن القرن التاسع عشر يهتم أيضا عند الرياضيين أنفسهم بفكرة المناهج في الرياضة .

ونحن نشرع في تناول المناهج الرياضية عند المحدثين في كل من الهندسة وعلم التحليل (Analyse) على حدة، وهما القسمان اللذان يقتسمان الرياضة. فنحصر الانتباه الآن في الهندسة وحدها مرجئين الكلام عن التحليل إلى مرحلة قادمة.

إنه في الهندسة بالذات بدأت ما يسمى حركة «النقد الداخلي» قبل أن تظهر في التحليل. ونقصد بالنقد الداخلي حركة فكرية عند رياضيين أوائل القرن الماضي جعلتهم ينصرفون عن التفكير في الاستزادة من الاكتشافات الرياضية وعن تغذية علمهم بالإضافة الجديدة. ينصرفون عن ذلك كله إلى الاتجاه المضاد تماما، وهو التفكير في فحص أو نقد نظرياتهم الرياضية القائمة والمقبولة عندهم إلى ذلك الوقت بقصد التثبت منها ومن سلامة براهينها. إن مثل هذا النقد هو بالطبع نقد ذاتي وباطني في داخل الرياضة القائمة فعلا. هناك في الواقع أبحاث طويلة عند الرياضيين في القرن الماضي

بدأت بنقد داخلى لعلومهم وأدت آخر الأمر إلى الآراء الحديثة فيما يختص بالأسس والمناهج الرياضية .

وفيما يختص بالهندسة التي تُعنى بها الآن، كانت نقطة البدء فى حركة النقد الداخلى فيها المسلمة الخامسة عند **أقليدس** التي ذكرناها فيما سبق. فلقد أدرك الرياضيون منذ زمن طويل بأن تلك المسلمة (مسلمة المتوازيين) ليست واضحة وبديهية كغيرها وحاولوا إقامة البرهان على صحتها كنظرية من النظريات المبرهنة على أساس المسلمات الأخرى أو بقبول مسلمات جديدة أكثر وضوحا تنتجها. ومن هؤلاء المؤلفين **نصير الدين الطوسى** (القرن الخامس الهجرى) وفى العصر الحديث **الاب ساكيرى Saccheri** الرياضى الإيطالى (المتوفى ١٧٣٣) الذى جاء بما توهمه برهانا لها فكان برهانه إيدانا بنشأة هندسات غير أقليدية. ومجمل القول فى برهانه هو أن عدم استطاعة إثبات بطلان تلك المسلمة يتضمن فى ذاته صحتها، ولذلك فقد قَبِلَ الثمانى والعشرين نظرية الأولى من **أقليدس** التى تبرهن دون حاجة إلى المسلمة الخاصة. ثم بعد ذلك امتحن النتائج التى تنتج عن القول ببطلان تلك المسلمة فلجأ إلى الشكل أ ب ج د الذى يتساوى فيه أ د ، ب ج ويسقطان عموديا على أ ب ثم امتحن الفروض الثلاثة الممكنة الناجمة عن القول بأن الزاويتين ج ، د

قائمتان (وهذا هو منطوق تلك المسلمة عند نصير الدين الطوسي) أو حادثان أو منفرجتان، وتلك الفروض الثلاثة تقابل القول بأن مجموع زوايا المثلث يساوى قائمتين أو أقل من قائمتين أو أكثر من قائمتين على الترتيب. فيرفض ساكيرى الفرضين الأخيرين لتناقضهما مع المسلمات الأقليدية الأخرى مستبقيا الفرض الأول ناظرا إلى أن استحالة إثبات بطلانه يتضمن فى ذاته صحة المسلمة المذكورة .

إن مجمل القول فى برهان **ساكيرى** هو أنه اعتقد فى قوة «برهان الخلف» فتصور فكرة محاولة البرهان على صدق قضية المتوازنين باستنباط تناقض بين إنكار هذه القضية وقبول المسلمات الأقليدية الأخرى، فبرهان الخلف إذن هو عدم استطاعة استنتاج نقيض المسلمة الخامسة من المسلمات والنظريات المقبولة الأخرى.

إنه بغض النظر عن قيمة هذا البرهان السلبى الذى لا يبرهن القضية ذاتها وإنما فقط استحالة نقيضها أو بالأحرى استحالة بطلانها، أنه فوراً إلى أن قيمة هذا البرهان من وجهة النظر الحديثة إنما جاءت من أن هذا البرهان أتاح فرصة لتكوين فروض ثلاثة سيعرف فيما بعد أنها تقابل على الترتيب هندسة **أقليدس** التقليدية وهندسة **لوباتشفسكى** Lobatschevski وهندسة **ريمان** Reimann. وهاتان الأخيرتان هندستان جديدتان من المجموعة التى سيطلق

عليها الهندسات غير الأقليدية Non-euclidian Geometries .

ولقد بذل الكثيرون بعد **ساكيرى** جهداً منقطع النظير للبرهنة على صحة المسلمة الخامسة المذكورة أمثال **لوجاندر** و**المبير** و**لوجرانج**، وهذا الأخير تقدم عام ١٨٠٠ ببحث إلى الأكاديمية الفرنسية فى ما توهمه برهاناً لها حتى إذا هم بإلقائه اعتذر بأنه لابد أن يعيد النظر فيه. وهذا كله يشهد بفشل كل المحاولات فى البرهنة على صحة تلك المسلمة. وكان لابد لهذا الفشل المتكرر رغم الجهود الجبارة من أن يؤدى آخر الأمر إلى أن يفترض الرياضيون إمكان قيام هندسة غير أقليدية تكون فيها المسلمة المذكورة باطلة. والرياضى **هالستد** Halsted على حق حين لاحظ أن اكتشاف تلك الهندسة أصبح أمراً محققاً فى مطلع القرن التاسع عشر. ففى عام ١٨١٦ أتم **كارل فريدريك جوس** (Gauss) الألماني بعد دراسة وثيقة، كتاباً لم ينشره خوفاً من صدمة للرأى الرياضى العام أثبت فيه وجود تلك الهندسة غير الأقليدية. ولكن الرياضى الروسى **لوياتشفسكى** الاستاذ بجامعة قازان كان أول من نشر أبحاثه فى تلك الهندسة عام ١٨٢٨ فعرفت باسمه تلك الهندسة التى اكتشفها **جوس** من قبل والتي تقابل الفرض الثانى من فروض **ساكيرى** .

ولم يمض غير قليل من الوقت حتى اكتشف **ريمان** عام ١٨٥٤

هندسة أجرى غير أقليدية على أساس الفرض الثالث من فروض ساكيرى يقبل فيها على خلاف أقليدس أن المستقيم لا يمتد إلى ما لا نهاية وإنما هو ينتهى حتما (وهذا عكس المسلمة الرابعة عند أقليدس التى تقبل مد الخط إلى ما لا نهاية) كما يقبل فيها أيضا أن كل مستقيمين على سطح واحد لابد يلتقيان فى نقطتين فلا توجد والحالة هذه مستقيمتان متوازيتان بالمعنى الأقليدى. وعلى العكس من ذلك تقبل هندسة لوباتشفسكى عددا لا ينتهى من المستقيمتان المتوازيتان التى تمر كلها بنقطة واحدة خارج مستقيم ما.

وفى كل من هاتين الهندستين الجديدتين تتتابع القضايا أو النظريات تتابعا محكما كما هو الشأن فى هندسة أقليدس ولكنها بالطبع نظريات مختلفة فيما بينها بالنسبة للهندستين الجديدتين. كما أنها تختلف جميعها عن نظريات الهندسة الأقليدية المألوفة لنا.

ومن المعلوم أن المكان (Space) الذى تقوم عليه هندسة لوباتشفسكى، انحناء السطح فيه سلبى محض ولذلك فإن تخيل الأشكال الهندسية التى تتحدث عنها غير يسير مع دقة تسلسل قضايها، بيد أنه من الهين تخيل الأشكال فى هندسة ريمان عند مقارنتها بهندسة أقليدس لأن المكان فيهما إيجابى. ولكى نتخيل هذا يجب أن نتذكر أننا نعيش فى عالم طبيعى كله كرات، فالأرض

-
- والكواكب كروية الشكل وعلى هذا فالهندسة المعبرة عن مثل هذا العالم كالهندسة الريمانية تكون هندسة واقعية بينما تكون هندسة أقلّيس هندسة وهمية أي غير واقعية بالنسبة لعالم الكرات . مثلاً :
- تكون المستقيمات الأقلّيدية الوهمية عبارة عن منحنيات أو أقواس أو دوائر مغلقة في الهندسة الريمانية.
 - يكون أقرب بُعد نقطيتين في العالم الواقعي هو القوس الريماني لا المستقيم الأقلّيدي الوهمي.
 - يكون السطح الأقلّيدي سطح كرة في الهندسة الريمانية فإذا تخيلنا هذا نتضح لنا القضايا الريمانية الآتية :
 - كل مستقيم مُنتهٍ لأنه دائري (وبهذا تسقط المسلمة الرابعة عند أقلّيس الخاصة بمد خط إلى ما لا نهاية).
 - المستقيمان يمكنهما أن يحدّداً سطحاً أو مكاناً.
 - كل المستقيمات تتقاطع في نقطتين، ومن ثم لا توجد متوازيات (وبهذا تسقط المسلمة الخامسة) .
 - مجموع زوايا المثلث تزيد على قائمتين زيادة تتناسب مع كبر أضلع المثلث ولكن المثلث الريماني المتناهي الصغر. مثلث أقلّيدي.
 - السطح الريماني له ثلاثة أبعاد بالقياس إلى السطح الأقلّيدي
-

كما أن المكان الريمانى له أربعة أبعاد بالقياس إلى المكان
الأقليدى ذى الأبعاد الثلاثة .

هكذا قامت هندسات ثلاث كل واحدة منها تقابل فرضا من
فروض ساكيرى. وخواص تلك الهندسات هي :

أولا : إن مجموع زوايا المثلث تساوى أو تقل أو تزيد على قائمتين
على الترتيب .

وثانيا : إن كلا منها تنطبق على أسطح انحناء كل سطح منها
كما يقول أصحاب الهندسة انحناء ثابت (Constant)
وهذا شرط ضرورى لانتقال الأشكال فوق أسطحها
انتقالا حرا دون تشويه لها، فهو (أى الانحناء) صفر
(أقليدس) وسالب (لوباتشفسكى) وموجب (ريمان) على
الترتيب. وعلاقة تلك الهندسات فيما بينها عند المقارنة هي
كما بين الرياضى بلترامى Beltrami كما يأتى :

م	الهندسة	السطح	الانحناء	مجموع زوايا المثلث
١	أقليدس	سطح	صفر	قائمتان
٢	لوباتشفسكى	مسطح شبه الكرة Pseudo - sphere	أقل من صفر	أقل من قائمتين
٣	ريمان	كروى	أكبر من صفر	أكبر من قائمتين

والنتيجة الهامة التى نخلص إليها مما تقدم فيما يختص بأسس الهندسة هى إذن، أن المسلمة الخامسة مستقلة منطقيا عن بقية مسلمات **أقليدس** .

وفكرة الاستقلال هذه هامة جدا لأنها تسمح لنا بأن نستبدل المسلمة الخامسة بغيرها ويكون البديل عنها إما نقيضا أو نفيا لها (ريمان) وإما مختلفا فقط (لوياتشفسكى) . فهو نقيض فى **ريمان** لأنه يقول إن كل متوازيين لابد يلتقيان عند امتدادهما إذ هما مجرد مستقيمين على سطح كروى واحد، فى حين كان **أقليدس** يقول أنهما لا يلتقيان مهما امتدا. ثم عند **لوياتشفسكى** المسلمة البديلة مختلفة فقط عن مثيلتها فى **أقليدس** لأن **لوياتشفسكى** يقول أنه من نقطة ما خارج مستقيم يمكن إقامة عدد لا ينتهى من المتوازيات فى حين كان **أقليدس** يقول من نقطة ما خارج مستقيم، إن متوازيات واحدا فقط هو الممكن إقامته.

على كل حال ثبت الآن. أن المسلمة الخامسة مستقلة عن بقية مسلمات **أقليدس** بحيث إذا ضُمَّ بديل أو أكثر إلى المسلمات الأخرى تكونت هندسات مختلفة متتابعة القضايا أو النظريات. وهذا تغير جوهري فى أسس الهندسة غير مسبوق ملئ باحتمالات أخرى للتغير. ذلك لأنه نشأ بالطبع سؤال جديد وهو هل يمكن إحداث



تغيرات أخرى فى أسس الهندسة بحيث ينشأ مزيد من الهندسات المنتظمة القضايا؟ .

مثلا هل يمكن وضع بديل أو أكثر لمسلمة أو لمسلمات أخرى أو هل يمكن قبول مسلمات جديدة فتنشأ هندسات جديدة؟ ذلك هو السؤال الذى سيطر على كل الأبحاث التالية فى الهندسة والذى لقى جوابا إيجابيا أيضا.

ولكى نلقى ضوءا على مثل تلك الإجابة دون أن نتورط فى تفاصيل فنية فى الرياضة ذاتها تبعدنا عن هدفنا فى تركيز الكلام حول المنهج والأسس نشير إلى أن الهندسات الثلاث المذكورة سابقا تفترض كلها أن أشكالها الهندسية يمكن أن تنتقل كلها فى عوالمها المكانية دون أن يصيبها أدنى تشويه، كما تنتقل الأجسام الصلبة فى مكانها الذى حددته كل واحدة من تلك الهندسات. وبما أن هذه النقلة الحرة شرط للقياس - قياس شكل على آخر - فى أي صورة كان ذلك القياس. وصور القياس فى الهندسات كثيرة كالمطابقة - Congruence والاستدارة حول نقطة أو ساق Rotation والمساواة Equality والتحويل Transformation والانعكاس Reflection وتبادل المواضع Permutation وغير ذلك من العمليات المعروفة عند الهندسيين للقياس، فإن تلك الهندسات الثلاثة تلتقى كلها فى اسم

مشارك هو أنها «هندسات قياسية» (Metrical Geometries) .
فينشأ بالطبع عن ذلك الوضع المشترك سؤال أول وهو، هل هناك
إمكان لإيجاد تعبير عام للهندسة القياسية يكون بمثابة الفكرة
المحورية فيها أو بمثابة قانونها العام المولد لها ؟ ومثل هذا السؤال
يؤدى حتما إلى التساؤل : وهل توجد هندسة غير قياسية؟
(Non-Metrical Geometry) وهذا السؤال الأخير له أهمية لأنه
يقودنا إلى الكلام عن بعض الهندسات غير القياسية.

لنأخذ مثلا الهندسية الإسقاطية Projective. فى هذه الهندسة
على عكس هندسة أقليدس لا تؤخذ المساواة Egalite فى اعتبار
الأشكال وإنما تؤخذ فقط فكرة المعادلة Equivalence بينها إذ يكفى
أن تنتقل من شكل إلى آخر بالتحويل الإسقاطى Projective Trans-
formation أى أن يكون أحد الشكلين، المنظر المسقط للآخر دون
مساواة بينهما وهذا هو معنى المعادلة. ومن ثم فإن شكلا ما يعادل
أو يناظر آخر فى الهندسة الإسقاطية مهما اختلف فى حجمه
ومساحته وأطواله.

وكثيرا ما يسمى هذا النوع من الهندسة الهندسة الكيفية Geo-
motrie Qualitative لأن فكرة الكم تأتى فى المقام الثانى بالنسبة
للكيف الشكلى فى هذه الهندسات غير القياسية. ومع ذلك فإن فكرة

الكم لم تتلاش نهائيا، لأننا لا نستطيع أن نعرف مثلا أن خطأ ما هو مستقيم أم غير مستقيم إلا إذا أجرينا قياسا كأن نطبق عليه حرف مسطرة مثلا وهي آلة قياس .

لكن هناك هندسة تخرج منها فكرة الكم نهائيا مثل هندسة الوضع Geometry of Situation ففي هذه الهندسة يتعادل شكلان إذا أمكن الانتقال من أحدهما إلي الآخر بواسطة تشويه مستمر (Continuous deformation). مهما كان هذا التشويه بشرط أن يكون مستمرا أو متصلا Continuous. وعلى هذا فإن دائرة ما تكون معادلة لشكل بيضاوي أو لأي منحنى مقفل ولكنها لا تعادل خطأ لأن الخط غير مقفل. كذلك تعادل الكرة مثلا سطحا مقعرا ولكنها لا تعادل عجلة السيارة أو حجر الرحي، لأنهما مفرغان من الوسط. لتخيل نموذجا يراد رسمه ثم رسما لذلك النموذج قام به رسام بدائي فإن النسب تتغير والخطوط المستقيمة التي ترسمها يد غير خبيرة تتعرج وتتشوه، هذان الشكلان من وجهة نظر الهندسة القياسية والهندسة الإسقاطية لا يتعادلان ولكنهما يتعادلان من وجهة نظر هندسة الوضع. وهذه الهندسة هامة وذات استعمال واسع.

الهندسة الإسقاطية وهندسة الوضع مثالان لهندسات غير قياسية. مثل هذه الهندسات القياسية وغير القياسية أمكن إيجاد

طريقة عامة لمعرفتها عندما أدخل ريمان وجراسمان Grassmann في وقت واحد تقريبا فكرة المكان ذي الأبعاد n أعنى الذى أبعاده أكثر من ثلاثة كأن تكون أربعة (هندسة ريمان) وقد تكون غير متناهية . هذه الفكرة - فكرة المكان ذي الأبعاد n (مهما كان عدد n) لعبت دورا هاما فى الأبحاث اللاحقة الخاصة «بكل الهندسات الممكنة، المعروف منها وغير المعروف، والقياسى وغير القياسى، تلك الهندسات الممكنة التى تعتبر الهندسات السالفة الذكر (أقليدس - لوباتشفسكى - ريمان - الإسقاطية - الوضع - الخ...) جزءا ضئيلا منها (من الممكنات الهندسية).

هذه الممكنات الهندسية كانت موضع اهتمام كثير من الرياضيين. ولقد عكف الرياضى كلاين Klein على تنسيق الهندسات الممكنة منطقيا بحيث تنتقل من هندسة إلى أخرى حسب مبدأ معين مستعينا فى ذلك بالنظرية الجبرية المسماة نظرية المجموعات Theory of Groupes فانتهى إلى أن عدد تلك الهندسات الممكنة منطقيا عدد لا ينتهى بالفعل، وكل واحدة منها تقوم على مسلماتها الخاصة بها. ولكن لم يدرس أحد من تلك الممكنات الهندسية الكثيرة جدا إلا أقلها. ومنذ ذلك العهد بدأ الهندسيون فى القرن الماضى يتحدثون عن - أو ينظرون فى - خواص هندسية مجردة بون الاكتراث لمسألة

اتفاقها أو عدم اتفاقها مع عالمنا الواقعى أو الحقيقى. كما بدت الهندسة علما بتلك الخواص الهندسية الممكنة، لا علما بخواص لموجودات حقيقية. ونحن نعلم كم الفارق كبير بين الممكنات الفكرية وبين الوجود الواقعى. بدت الهندسة إذن علما بالخواص الهندسية الممكنة عقلا لا علما بالموجودات. ذلك لأنهم أمام هندسات عديدة كل واحدة منها متسقة القضايا وليست واحدة منها أحق من غيرها فى الادعاء بأنها تعبر عن خواص المكان الحقيقى أو الفعلى كما كان الأمر عند الرياضيين فى تصورهم لهندسة **أقليدس** قبل اكتشاف الهندسات غير الأقليدية. وهكذا انحسرت أو تقلصت فكرة «الحقيقة» (Verite) فى الهندسة عن ميدان المطابقة بين قضايا الهندسة والعالم الواقعى وانحصرت فى فكرة «عدم التناقض» بين قضايا هندسة واحدة بعينها أعنى انحسرت فى الإنسجام المنطقى لقضايا نسق هندسى ما فيما بينها»

وهذا تحول خطير فى فكرة «الحقيقة» عامة والرياضية أو حتى العلمية خاصة. والرياضى **تورينوس Taurinaus** (المتوفى عام ١٨٧٤) عبر عن هذا بقوله :

«توجد فى الهندسة حقيقة باطنة (Verite Interne) وحقيقة خارجة (Verite Externe) والحقيقة الباطنة هى أن كل هندسة تؤلف

نسقا مقفلا على نفسه (Systeme ferme en soi) منسجم القضايا ولا تناقض بينها بحيث لا نتساعل حينئذ عن إمكان تطبيقها على الظواهر الخارجية... ولكن إذا كان لابد أن نتساعل هذا السؤال الأخير، فحينئذ تنشأ مسألة الحقيقة الخارجة التي يصح أن تضاف إلى هندسة ما وتلك مسألة غير رياضية وتتجاوز حدود الرياضة».

(١١)

خلاصة هذا أن مسألة «الحقيقة» التي يمكن أن ننسبها إلى قضايا هندسة، ما أصبحت تعنى فقط عدم تناقض تلك القضايا فيما بينها ولا تعنى إطلاقا المعنى القديم للحقيقية وهو مطابقة القضايا للواقع أو المكان الخارجى.

إن هذا التصور الجديد للحقيقة الرياضية طعنة نجلاء لنظرية كانط فى الحدس المكانى (Intuition Spacial) التى سيطرت طويلا على الفكر الرياضى والتى رأت فى هندسة أقليدس الهندسة «الوحيدة والضرورية» بسبب تعبيرها عن خواص المكان (Space) أو مطابقتها له، ولا فرق عندنا بين من يرى أن المكان قائم فى العالم الخارجى كالأوقعيين جملة وعلى رأسهم نيوتن وبين من يقول إن المكان من العناصر القبلية التى يشتمل عليها ذهن الإنسانى وحده

دون العالم الخارجى **كانط**، إذ لا يهمننا هنا فى الحقيقة أن يكون المكان خارجيا بالنسبة للفكر الإنسانى أو قبليا (Apriori) فيه وإنما يهمننا فقط أن نرى بوضوح كيف استقلت قضايا الهندسة عن المكان أيا كان، ولم تعد تقاس الحقيقة فيها بمدى صلتها بالمكان أو مطابقتها له وإنما تقاس فقط بميزان منطقى صرف هو عدم تناقضها فيما بينها فى داخل كل هندسة على حدة. وهذا هو معنى الحقيقة الذى أدت إليه نشأة الهندسات وتطورها نتيجة لحركة النقد الباطنى التى كانت المسلمة الأقليدية الخامسة نقطة الانطلاق فيها.

ومع ذلك لابد لنا من أن نشير هنا إلى نظرية **كانط** فى معنى الحقيقة الرياضية، نظرا لمدى تأثير **كانط** الواسع فى الفكر الفلسفى البحث وفى الفكر الرياضى أيضا الذى فلسف أو اهتم بمسائل فلسفية كالتى نحن بصدها هنا فى أصول الرياضيات. لقد أرادت الفلسفة النقدية بيان أن هندسة **أقليدس** - ولم يكن يُعرف غيرها فى عصر **كانط** - هى الهندسة الوحيدة والضرورية من حيث هى معبرة عن خواص المكان الوحيد المعطى لنا فى حسنا أو فكرنا. وهى لكى تثبت تلك الضرورة المعبرة عن ذلك المكان الوحيد رأت أنه يكفيها أن تبرر كيف أن كل أحكام تلك الهندسة (بل الرياضيات كلها) أحكام على حد اصطلاحه «تركيبية قبلية».

أما إن أحكامها - أو بلغة الهندسة - نظرياتها هي تركيبية لا تحليلية، فهذا يتضح من أنه في كل خطوة من خطواتها تثبت نظرية من النظريات صفة جديدة لموضوع هندسى معروف لم تكن لنصل إليها لمجرد تحليل الموضوع وحده، ولكننا نضيفها إليه من خارجه ونركبها إليه تركيبا جديدا بواسطة ما نستدعيه من مسلمات أو نظريات سبق برهانها وما ننشئه من أعمال، كمدّ خط أو استدارة مثلث على ساق أو غير ذلك. مثالا لو أخذنا موضوع المثلث القائم الزاوية وحللناه ما وسعنا التحليل، فلن نعثر فيه كيف يكون المربع المقام على الوتر يساوى مجموع المربعين المقامين على الساقين الآخرين، إذ لابد من إنشاء الأعمال التى ترد الموضوع الحاضر إلى أشكال مألوفة فى نظريات سابقة إلى المسلمات كما هو واضح من برهان فيثاغورس المعروف فى كتب الهندسة، فنركب بذلك الصفة الجديدة، أى المحمول إلى موضوعه. بعبارة أخرى كان لابد أن نرجع إلى المكان الحدسى فى ذهننا ونمارس نوعا من التجربة الحدسية فيه التى تمثلها تلك الأعمال لكى نصل إلى هذا التركيب .

بقيت صفة القبليّة. فكون تلك الأحكام التركيبية هي أيضا قبليّة أى سابقة على التجربة الخارجية بالحواس. ومن ثم ضرورتها وكليتها (لأن الضرورة والكلية تجملهما كلمة القبليّة) فذلك يتضح من أن المكان الذى ننشئ فيه الأعمال أو نجرى فيه التجربة الرياضية

الهندسية إنما هو مكان قبلى فى ذهننا، أو على الأصح فى حساسيتنا. فعلى خلاف فيوتن الذى وضع المكان فى العالم الخارجى، نجد كانط لكى يؤكد القبلية فى أحكام الرياضة يضعه فى حساسيتنا كبطانة لها فهذه مهياة بطبعها بصورتى المكان والزمان كشرطين صوريين مسبقين لتلقى كل إحساس خارجى أو باطنى. فترجع بذلك قبلية الأحكام التركيبية الرياضية إلى قبلية صورتى الحساسية (المكان والزمان). والمكان بصفة خاصة هو الشرط القبلى لقيام الأشكال الهندسية. أما الزمان فهو الشرط القبلى لسلسلة الأعداد الطبيعية. والمكان فوق ما يبيحه من إقامة أعمال وأشكال هو الذى تعبر عن خواصه أو طبيعته المسلمات الأقليدية تلك المسلمات التى تستمد منها الهندسة قوتها ووجودها كعلم وثيق، فمن خواص ذلك المكان مثلاً مد خط إلى ما لا نهاية. وهى المسلمة الرابعة (لأن المكان لاينتهى) والمتوازيان لا يلتقيان (المسلمة الخامسة)، والأبعاد ثلاثة (تعريف الجسمية) والكل أكبر من الجزء، إلى آخر ما هناك من خواص لهذا المكان القبلى الوحيد، عبرت عن مجموعها المسلمات الأقليدية واستمدت منها ضرورتها التى لا سبيل إلى القول بغيرها فتصبح تلك المسلمات ومن ورائها كل القضايا الهندسية قبلية ضرورية لأنها تعبر عن ذلك المكان القبلى الوحيد. وعلى هذا لا يمكن أن تقوم من وجهة نظر كانط هندسة أخرى غير الهندسة الأقليدية

فهي الهندسة بالذات لأن ضرورتها مفروضة علينا بطبيعة تركيبنا الذهني (الحساسية).

وها نحن نرى الآن كيف تنهار الفلسفة الرياضية عند كانط بعد أن عرفنا أن المكان ليس واحداً، إذ هناك من الممكنة ما أبعاده ن (ن فوق الثلاثة أبعاد). ثم بعد أن عرفنا أن الهندسة الأقليدية ليست إلا واحدة من عدد لا ينتهي من الممكنات الهندسية. ثم أيضاً بعد أن عرفنا أن الحقيقة الهندسية تعني اتساق أو انسجام مجموعة من القضايا غير المتناقضة التي تستنبط من عدد من المسلمات، ثم أخيراً بعد أن علمنا أن المسلمات تختلف من هندسة إلى أخرى ولا يصح أن ننسب إليها صفة الحقيقة بمعناها القديم أى المطابقة لخواص مكان ما لأننا لا نعلم أي مجموعة من المسلمات حقيقية بهذا المعنى وكل ما نستطيع أن ننسبه إلى كل مجموعة منها من معاني الحقيقة هي أنها مجموعة قادرة على تحمل عبء البرهان على عدد من القضايا المعينة دون تناقض بينها، وهذه هي «الحقيقة» التي تلازم كل «نسق استنباطي فرضي» (Systeme hyothetico - de-ductive) كما سبق بيانه، أي ما يسمى أخيراً بالأكسيوماتيك (Axi-omatique) (راجع المقارنة بين نسق أقليدس والمحدثين فقرة ٩).

كما قلنا ليس البحث فى منهج الرياضة هو دراسة لطرق حل المسائل الرياضية مسألة، مسألة، فذلك موضعه دروس الرياضيات. وإنما البحث فى منهج الرياضة هو بحث فى الأصول أو الأسس أو المبادئ التى تستند إليها وتستمد منها قوتها. ولقد سبق أن عرضنا لموقف القدماء (أرسطو وأقليدس) من مسألة الأسس والأصول فى الهندسة بالذات. ثم فى مرحلة تالية بينا كيف أن الهندسيين المحدثين فى القرن الماضى فى إطار حركة نقد باطنية فى الهندسة نفسها وانطلاقا من المسلمة الأقليدية الخامسة تأنوا شيئا فشيئا إلى إدراك استقلالها عن غيرها من المسلمات وإلى اقتراح أكثر من بديل لها مما أدى بهم إلى هندسات غير متوقعة. كما تساءلوا عن إمكان تغييرات أخرى فى مسلمات غير المسلمة الخامسة. وكان حصيلة هذا كله نشأة هندسات كثيرة غير أقليدية وغير قياسية. وظهر معها تصور جديد للحقيقة الهندسية لا يمت بصلة إلى مطابقة المسلمات للمكان سواء أكان واقعيا وخارجيا أم كان قبليا فى الذهن. ولقد جعلنا عنوان هذا الفصل من النقد الباطنى إلى الأكسيوماتيك الحديث وما نحن نصل الآن إلى الكلام عن هذا الأكسيوماتيك الذى هو بحث حول المسلمات نفسها من جهات كثيرة .

فلقد تبينا فيما سبق أن عددا يسيرا من الهندسات الممكنة كان موضع الدراسة عند الهندسيين المحدثين وهذه الدراسة تنحصر فى تحديد مسلمات كل هندسة معينة من الهندسات وحصر القضايا أو النظريات التى تترتب عليها ويؤلف مجموعها موضوع تلك الهندسة، تلك هى الحركة التى عُرِفَتْ فى تاريخ الرياضة منذ الربع الأخير من القرن الماضى باسم الأكسيوماتيك (Axiomatique) أى مباحث تأسيس أو - إن أمكن التعبير، تأصيل الهندسة أى إرجاعها إلى أصول (حسب اصطلاح **أقليدس** فى عنوان كتابه) وقد افتتح الرياضى **الألمانى مورتز باش** Pasch أبو الأكسيوماتيك الحديث تلك الحركة منذ عام ١٨٨٢ ثم أسهم فيها على غرار رياضيين ومنطقيين كثيرون من معاصريه من أمثال **بيانو** Peano أستاذ التحليل بجامعة تورينو، وتلاميذه الكثيرون ونخص بالذكر منهم **فيلاتي** Vailati و**بييرى** Pieri و**أنريكس** Enriques، ثم **نيفيد هلبرت** أستاذ الرياضة بجامعة برلين، ورياضيون من أمثال **هالستد** Halsted و**فلبن** Velben وغيرهم .

والبرنامج الذى افتتحه **مورتز باش** هو الذى عبر عنه بالفاظه

الآتية :

«إذا كانت الهندسة تريد أن تقوم كعلم استنباطي فيجب أن يكون الاستنباط فيها مستقلا عن المعنى المألوف للألفاظ الهندسية كالنقطة والخط والسطح.. الخ كما يستقل كذلك عن الأشكال. وكل ما يجب أن يحصر الذهن فيه عند الاستنباط هو العلاقات التي تقوم بين تلك الألفاظ والتي تعبر عنها المسلمات والتعريفات».

ويفسر مورتز باش هذا التصور الاستنباطي الذي وصفه لنا في تلك الفقرة على النحو الآتي بألفاظه :

«الاستنباط الرياضي غرضه أولا البرهان على خاصية جديدة لشيء هندسي ما، وثانيا بيان العلاقة المنطقية بين القضايا. ولذا يجب ألا ينزلق أى خاطر ضمنى، أعنى أى فرض أو قضية حدسية (بديهية) أثناء البرهان إلى جوار المسلمات وما يترتب عليها من قضايا مستمدة منها. فالاستنباط الدقيق يجب أن يبرز فقط تسلسلا منطقيا للقضايا كما أنه يجب أن يستمد كل قوته من المسلمات المصرح بها منذ البداية دون أدنى استعانة بأي حدس فى أية صورة له كشكل مرسوم أو مسلمة نضمها فى أذهاننا أو قضية ندخلها خلصة على أنها بديهية. ومن ثم تجيء ضرورة كون الاستنباط صوريا (Formal) ورمزيا (Symbolic) معا دون الاستعانة بالأشكال

الهندسية كما هو مألوف في هندسة **أقليدس** تلك الأشكال التي رأى فيها كانط مبررا لنظريته. هذا وتلك الصورية (Formalism) يجب أن تمتد كذلك إلى المسلمات نفسها».

معنى هذا أننا في الهندسة لن ننظر بعد ذلك في أشكال وأعمال وإنما فقط في علاقات منطقية صرفة أو كما عبر هو في قضايا صورية ورمزية وتمتد هذه الصورية الرمزية لتشمل المسلمات أيضا . وهكذا نرى من هذا البرنامج الذي وضعه مورتز باش ومن تفسيره له، كيف انتهى آخر الأمر ذلك النقد الباطني للهندسة، التي هي علم الأشكال الحسية بالرياضيين أنفسهم من أمثال مورتز باش وتلاميذه إلى إغفال الأشكال وإلى تناول موضوعاتهم في ضوء العلم الصوري الرمزي الشقيق أعنى علم المنطق. وهذا هو ما أدى بدوره إلى الإسراع بإصلاح المنطق نفسه وإخراجه من ركوده الطويل كعلم أشبه بعلوم اللغة وتحويله إلى علم رياضي ناضج ليقوم بدوره الجديد الذي أصبح جوهريا بالنسبة إلى تأسيس وتأصيل الرياضة على نحو يستبعد معانى الألفاظ الهندسية والأشكال الحسية ويستبقى رموزا صورية وعلاقات منطقية فحسب .

هذا الجانب من تطور المنطق الصوري ليقوم بدوره الهام في تأسيس الرياضة سنفرد له بحثا لاحقا (أنظر فقرة ٢٣) ولنعد إلى

برنامج مورتز باش. فهذا المؤلف الذى لخصنا برنامجه يضع القاعدتين الآتيتين لتأسيس المسلمات فى النسق الاستنباطى الهندسى .

(١) يجب النص صراحة (Explicitemment) عن التصورات والألفاظ الابتدائية (Concepts Primitifs) التى بواسطتها سنعرف كل التصورات أو الألفاظ المشتقة (Derives) الواردة فى هندسة ما .

(٢) يجب النص صراحة عن القضايا الابتدائية (وهى المسلمات التى بواسطتها ستبرهن القضايا المشتقة) (التي هى النظريات) فى كل هندسة معينة. وتلك القضايا الابتدائية يجب أن تعبر فقط عن العلاقات المنطقية الصرفة التى توجد بين التصورات الابتدائية المقبولة، كما يجب أن تكون مستقلة عن المعانى المعتادة فى القاموس لتلك التصورات (لأن تلك المعانى أشياء حدسية وشخصية تعيق الاستنباط الصورى البحت).

مثال واحد يكفى لبيان كيفية تطبيق ومراعاة القاعدتين السالفتين: إذا افترضنا أننا نعرف معانى النقطة والخط والسطح. يمكننا أن نضع المسئلة الآتية :

«إن أى نقطتين فى سطح ما إنما تتصلان معا بمستقيم معين يحتويه بحذافيره ذلك السطح».

فإذا فرضنا الآن أن كلا من المستقيم والسطح عبارة عن «طائفة» (Class) من النقط فإنه يمكننا أن نترجم تلك المسلمة بعلاقات منطقية صرفة كعلاقتي «الانتماء» (Appartenance) و«الاحتواء» (Inclusion) وتصور منطقى مثل «الطائفة»، فنقول مثلا فى تلك الترجمة المنطقية الصرفة : «إن نقطتين ما مما «ينتمى» إلى الطائفة «سطح» «ينتميان» أيضا إلى الطائفة «مستقيم» كما أن العناصر التى تؤلف «المستقيم» «محتواة» فى عناصر «السطح» .

وهنا نلاحظ أن الألفاظ (نقطة ومستقيم وسطح) فقدت معانيها العادية المألوفة فى القواميس أعنى أنها فقدت صفة كونها حدوسا هندسية أى أشكالا مكانية لها صلة بالمكان، وحل محل تلك المعانى التصور المنطقى «طائفة» (Classe). فعندنا الآن من جهة ثلاث طوائف مختلفة (النقطتان، الخط، السطح) ومن جهة أخرى العلاقات المنطقية القائمة بينها وهى (الانتماء والاحتواء)، وعلى هذا النحو لو عبرنا عن تلك الألفاظ وعن علاقاتها أيضا برموز جبرية بعضها متغير (Variable) وبعضها ثابت (Constant) كما فى الرياضيات نجد أنفسنا آخر الأمر أمام قضايا منطقية صرفة لا توحى بأشكال هندسية ما إذ هى مستبعدة تماما هنا. وهكذا تبدو أهمية نور المنطق فى ثوبه الرياضى الجديد بالنسبة للعلوم الرياضية.

ولقد حذا كثيرون كما قلنا حذو **مورتز باش** فى تصورهِ
الأكسيوماتيكى (أو التأسيسى) للهندسة. وعمموا طريقته فى تناول
الهندسة فى صورها المختلفة أعنى فى تأسيس كل الهندسات على
أصول ومسلمات مبتكرة. وبروح كالتى حدث بالفيلسوف والرياضى
ليبنتز أن يبرهن كل قضية رياضية وحتى المسلمات نفسها لأنه
يرفض البداهة كعلامة لصدق المسلمة، عكف هؤلاء الرياضيون على
تنقية الهندسة من المسلمات التى قبلها القدماء بسبب وضوحها
الحدسى أعنى بسبب بداهتها لصلتها بالمكان، وكذلك على البحث عن
مسلمات أخرى أكثر بساطة تلقى ضوءاً على مسلمات القدماء
البديعية أو تنتجها. ويمكن تلخيص اتجاهاتهم فى مباحثهم الخاصة
بتأسيس الهندسات فى النقاط الأساسية الآتية :

١- البحث عن كل مسلمة مضمرة (Postulat implicit) والنص
عليها صراحة (بدلاً من استعمالها ضمناً وإدخالها فى البراهين
خلسة) وذلك بالنسبة إلى كل هندسة على حدة، مثلاً فيما يختص
بهندسة **أقليدس**، بين **مورتز باش** أنها تضمّر مسلمات الترتيب (Or-
dre) التى لم ينص عليها **أقليدس**. كما بين **هنرى بوانكاريه** كذلك
أنها فاقدة أيضاً لمسلمات النقلة (Déplacement) .

٢- تكوين نسق «كامل» (Système Complet) لمسلمات كل

هندسة على حدة، مثلا كَوْن **بيفيد هلبيرت** D. Hibert عشرين مسلمة
لهندسة **أقليدس** (وهى طبعا تختلف عن مسلمات **أقليدس** نفسه) كما
كون **بيانو** ١٨ مسلمة للهندسة الوصفية (Geom. Descriptive)،
ماريو بييري Pieri ٢١ مسلمة للهندسة الأسقاطية (Geom. Projec-
tive) وهكذا.

٣- الاجتهاد فى الاقتصاد فى عدد المسلمات بأن ترد مسلمات
كل هندسة إلى أقل عدد ممكن، مثلا استطاع **إنريكس** Enriques أن
يرد المسلمات الإحدى والعشرين المقبولة عند **بييري** بالنسبة للهندسة
الإسقاطية إلى تسع مسلمات فقط. وهذا الاقتصاد فى المسلمات
لحق أيضا التصورات أو الألفاظ الابتدائية التى تعرف فى أول
النسق كما سنبينه فيما بعد.

٤- العمل على أن تكون المسلمات غير مستمدة من الحدس
المكانى كما أراد القدماء وإنما عبارة عن علاقات منطقية كما بينَ
باش. مثلا يستعمل **بيفيد هلبيرت** علاقته «الاشتغال» (Apparte-
nance) أو «التطابق» (Congruence). ثم أن تلك العلاقات المنطقية
إنما تقوم كما بين **باش** بين عناصر أو تصورات ابتدائية تُختار
اختيارا عسفيا أو تحكيميا (Arbitaire) كما تمليه إرادة الباحث. قليلة
العدد وتُجرد من معانيها الحدسية المكانية المألوفة فى القاموس

ويُنظر إليها كما لو كانت كائنات أو خصائص صورية بحتة لا صلة لها بعالمنا الواقعي ولا معنى لها غير ما تحدده لها العلاقات المنطقية من معنى تقدمه على هيئة مسلمات، إذ المسلمات هي التي تحدد معنى الحدود الابتدائية وذلك ببيان كيفية استعمال تلك الحدود. مثلاً هندسة **أقليدس** اختار **هليبرت** النقطة والمستقيم والسطح حدوداً أولية.. واختار **فايل Weyl** النقطة والمتجه الحر (Vecteur libre) و**بوانكاريه** النقطة والنقطة، و**بييرى** النقطة والمسافة بين نقطتين. فى كل هذه الحالات الاختيار تحكمى عسفى وفق إرادة الباحث ولا يوجهه سوى اهتمام الباحث بفكرة دون أخرى.

٥- إذا تم هذا التأسيس الصورى للمسلمات بالشروط المذكورة آنفاً، يعمل الرياضى على أن يستنبط بقوة المنطق وحده أى دون الإلتجاء إلى الحدس (كالأشكال المرسومة أو حتى المتخيلة) أو إلى أية مسلمة جديدة لا تشتمل عليها مجموعة المسلمات الابتدائية. أن يستنبط قضايا أو نظريات الهندسة التى هى موضع النظر .

هكذا عدل الرياضيون (الذين عملوا على تأسيس الهندسات على تلك الأسس الصورية المنطقية) عن الأشكال والأعمال إلى النظر فى مجرد علاقات منطقية صرفة. بهذه المناسبة أنبأ إلى أن العدول عن البراهين الهندسية المعتمدة على الأشكال وإنشاء الأعمال التى أسهب

المناطق الكانطيون فى الحديث عنها تحت اسم التركيب (Construc-
tion, Synthese) والأحكام التركيبية والتي لا يزال بعض المنطقيين
المحدثين من أمثال **جويلو** C. blnt فى كتابه Traite de logique
الذى اشتهر فى فترة ما بين الحربين وهو من المجددين لكانط ولمذهب
فى أسس الرياضه، ويردد صدى كانط على نحو يختلف بعض
الشيء حين يذهب إلى أن الاستنباط هو التركيب (Deduire c'est
construire) أعنى أن الاستنباط الرياضى أو المنهج إنما يقوم فى
جوهره على تركيب أشكال جديدة ترد النظرية موضع النظر إلى
أشكال سبقت معرفتها وذلك بواسطة الأعمال (Constructions)
وهذا هو البرهان الرياضى عنده. وهكذا كما يقول المنطقى **نيكود**
Nicod مواطن **جويلو** وناقده «بينما لا يزال الفلاسفة الناظرون فى
البرهان الرياضى يتأملون صفة زائدة وخارجة على صفات ذلك
البرهان، فإن الرياضيين أنفسهم قضوا على تلك الصفة لأنهم يرون
فى الالتجاء إلى الحدس علامة لفجوة أو ثغرة يدخل منها مبدأ أو
قضية مضمرة لا تشتمل عليها مجموعة المسلمات الأولية ولا تسمح
باستنباطها وهم يحاولون التعبير عن تلك القضية المضمرة فى هيئة
حدسية ما».

إن الذى وصلنا إليه فى هذه المرحلة الخاصة بأكسيوماتيك الهندسة هو أن أصحاب هذا العلم الباحثين فى أسسه ومبادئه قد افقدوا الألفاظ الهندسية المستعملة فى بداية كل نسق استنباطى هندسى معانيها الحدسية أو المكانية المذكورة فى القاموس والتي يمكن أن ترسم فى أشكال كما حولوا المسلّمات الهندسية الحدسية (الدالة على أشكال فى المكان) إلى مجرد علاقات منطقية.

ونريد الآن أن نواصل بيان هذا الموقف الجديد على نحو آخر يختلف بعض الشيء عما تقدم، وإن كان يلقي عليه كل الضوء، وذلك بالوقوف قليلا عند اقتراح عجيب **لهنرى بوانكاريه** Poincare ثم نتابع الكلام فيما بعد عن الشروط المنطقية لإقامة الأكسيوماتيك .

الواقع إن خلاصة ما فرغنا أنفا من بيانه هو أن كل أكسيوماتيك بالمعنى الحديث يصل إلى درجة من التجرد والعموم والبعد عن الأشكال الحدسية بحيث أنه لا يأخذ معنى أقلديا أو ريمانيا أو حتى هندسيا أو عدديا أو غير ذلك، إلا عند تفسير حدوده الأولية كأن نلصق بها معنى ريمانيا أو معنى أقلديا أو غير ذلك. وهذا هو الذى **وضحه هنرى بوانكاريه** بطريقته الخاصة التى تختلف عما سبق بيانه ولكنها تبين بكل تأكيد كيف أن الأكسيوماتيك الحديث أفقد

الهندسات معانيها الهندسية المؤلفه، وذلك باقتراحه فى كتابه العلم والفرض (ص٥٦-٥٨) تأليف قاموس هندسى يعطى كل المعانى الهندسية الممكنة لكل لفظ أو حد من الحدود الأولية، وللمسلمات المستعملة فى كل أكسيوماتيك، وهذا القاموس ييسر ترجمة مسلمات هندسة ما إلى هندسة أخرى، وكذلك القضايا أو النظريات المترتبة عليها، كما يسهل أيضاً ترجمة مسلمات هندسة واحدة بالذات إلى هندسات مختلفة، ومن أمثلة هذا القاموس عند **بوانكاريه** ما يأتى :

«المكان... جزء من المكان يوجد فوق السطح الأساسى.

السطح... كرة تقطع عمودياً السطح الأساسى .

المستقيم ... دائرة تقطع عمودياً السطح الأساسى .

الكرة... الكرة

الدائرة... الدائرة.

الزاوية ... الزاوية .

الخ...»

يقول **بوانكاريه** إنه بمثل هذا القاموس يمكن أن نترجم نظريات **بولوياتشفسكى** إلى لغة أقليدية والعكس بالعكس، تماماً كما نترجم نصاً ألمانيا إلى الفرنسية، والعكس بالعكس بواسطة قاموس ألماني فرنسي، ويمكن تأليف قواميس مشابهة أخرى .

هذا الاقتراح الذى جاء به **بوانكاريه** يؤكد مرة أخرى أن الهندسة عند الأكسيوماتيكيين المحدثين، أصبحت شيئا مجردا وصوريا، أى بعيدا كل البعد عن حدس المكان فى أى صورة له، وهكذا ننتقل من هذه النقطة إلى بيان الشروط المنطقية أو الصورية التى يجب أن تتوافر فى إقامة نسق أكسيوماتيكي من هذا النوع .

(١٤)

لقد تبينا فيما تقدم أن المسلمات فى الأكسيوماتيك الحديث كما وضح هورتز باش تتكون من علاقات منطقية بين حدود أولية كالنقطة والخط والحركة الخ قليلة فى عددها، وتُختار اختيارا عسفيا وفق وجهة نظر الباحث، كما تُجرد عن معانيها الحدسية أو الهندسية، وتُتصور كمعانٍ منطقية، هذا الجانب الصورى من الأبحاث المتعلقة بأسس الرياضه وطرقها أثار مسألة منطقية أخرى هى الشروط المنطقية التى يجب أن تتوافر فى تأسيس أو اختيار المسلمات. ومن ثم فنحن ننتهى الآن إلى أن ندرس فى اختصار الشروط المنطقية التى يجب أن تراعى عن تأسيس الأكسيوماتي، وهى على الترتيب :

— (١) استقلال كل مسلمة عن الأخرى.

(٢) عدم تناقض المسلمات .

(٢) الشرط الذى سماه **هلبيرت** شرط «الإشباع» (Saturation)

أى كون عدد المسلمات الخاصة بهندسة ما هو ما يكفى بالضبط لاستنباط نظريات تلك الهندسة بحيث لا يمكن زيادتها أو نقصانها إلا وأدى ذلك إلى قضايا هندسة مخالفة.

نريد الآن أن نتناول كل شرط من تلك الشروط على حدة.

لقد تنبه أصحاب الهندسات غير الأقليدية فى القرن الماضى إلى بعض هذه الشروط عندما بين **ريمان** مثلا أن نفى المسلمة الخامسة يؤدي إلى هندسة منسقة القضايا غير إقليدية. ومن قبل هؤلاء فى القرن السابع عشر تنبه الفيلسوف الرياضى المنطقى **ليبنتز** إلى بعضها مثل شرط عدم التناقض، فإن **ليبنتز** كان يطمح فى برهان كل قضية ممكنة وحتى المسلمات الرياضية - لكى لا يقبل قضية من غير برهان - وذلك بأن يردها إلى الهوية أى الذاتية (Identite) ببيان أن محمولها لا يتناقض وموضوعها. وإنما يتأتى هذا بأن يجد تصور المحمول مكانا طبيعيا ومنطقيا فى تصور الموضوع، فيكون بذلك جزءا من هويته أو ذاتيته. ويتضح من ذلك أن **ليبنتز** لم يكن يقصد عدم تناقض مسلمة مع أخرى وإنما كان يقصد عدم تناقض مسلمة بعينها فى ذاتها أو مع ذاتها .

أما الأكسيوماتيك الحديث فإنه لا يعنى بمسألة حقيقية المسلمة

فى ذاتها لأنه لا يعنى بمسئمة منفردة كما كان يقول **ليبنتز** وإنما يعنى بطائفة من المسلمات مجتمعة معا لتأسيس نظرية رياضية واحدة، ومن ثم كانت مسألة التئام تلك المسلمات معا. أى عدم تناقضها فيما بينها. هى المسألة المنطقية الأولى والهامة فى إقامة النسق الأكسيوماتيكي. ولكن كيف نعرف أن طائفة من المسلمات غير متناقضة فيما بينها؟ هذه مسألة عسيرة جدا كما بينت دراستها. فإن **هلبرت** يعرف عدم التناقض بقوله إنه «استحالة استنباط قضية ما تناقض تلك المسلمات، أى تكون نفيا كليا أو جزئيا لإحدى المسلمات». وإذن لا يمكن البرهان مباشرة على عدم تناقض المسلمات فيما بينها وإنما يكون ذلك فقط بطريق غير مباشر وهو عدم العثور على قضية مستنبطة منها وتكون نفيا لإحداها. وواضح أن مثل هذا البرهان غير أكيد ولا حاسم لأننا إذا كنا لا نعثر فى الحالة الحاضرة لطائفة من المسلمات الخاصة بنظرية رياضية ما أية قضية مستنبطة منها تكون متناقضة معها، فإننا لا نستطيع أن نجزم باستحالة ذلك فى مستقبل قريب أو بعيد.

مثل هذا الاعتراض جعل **هلبرت** يفكر فى طريقة أخرى مباشرة للبرهان على عدم تناقض طائفة من المسلمات فيما بينها، وهذه الطريقة هى أن نعطى للمسلمات تفسيرا مشخصا فى هذا العالم

فنبين أنه توجد أشياء فى عالمنا هذا تنطبق عليها المسلمات. وهذا التفسير هو الكفيل فى رأيه بعدم تناقضها. وأفضل التفسيرات الممكنة عنده التفسير العددي، لأن الأعداد كما يقول نموذج اليقين عند الرياضيين وبها يقيسون صحة كل قضاياهم.

إن هذا الأسلوب فى تفسير المسلمات بالأعداد للتحقق من عدم تناقضها ليس غريبا على كل من حاول حل مسألة جبرية وأراد أن يتحقق من صحة النتيجة باستبدال الحروف بالأعداد .

هناك بالطبع اعتراض جوهرى على ما ظنه هـ لبرت طريقا مباشرا للبرهان بقبوله تفسيراً عددياً للمسلمات وهو أن الأعداد نفسها جزء من أهم أجزاء الرياضيات التى يراد تأسيسها كلها على أسس أكسيوماتية فكيف تتخذ معياراً أو محكاً لليقين بعدم تناقض المسلمات فى أى فرع من فروع الرياضة؟ أليست الأعداد نفسها فى حاجة إلى مسلمات؟ ألم يعرف التاريخ القريب محاولات مختلفة لإقامة مسلمات تنتج الأعداد؟ إذن يجب أيضاً استبعاد التفسير بالأعداد كبرهان على عدم تناقض المسلمات.

على كل حال يبدو أنه لا يوجد إلى الآن أى طريق مباشر للبرهان بيقين على عدم تناقض المسلمات) والباب مفتوح أمام مزيد من البحث.

هذا وشرط عدم التناقض عند هـلبرت شرط متضمن في الشرطين الآخرين : الاستقلال والإشباع. فإن هـلبرت يقول إن مسلمة ما تعتبر «مستقلة» عن المسلمات الأخرى إذا كان نفيها يؤلف مع هذه المسلمات الأخرى مجموعة غير متناقضة. (لنتذكر المسلمة الخامسة) عند ريمان فهي نفي للمسلمة الخامسة عند أقليدس) ويقول هـلبرت إن طائفة من المسلمات تصل إلى درجة «الإشباع» إذا كانت إضافة أية مسلمة جديدة تؤدي إلى جعل تلك الطائفة متناقضة.

لنمتحن عن قرب فكرة الاستقلال، وهي فكرة عرفها أصحاب الهندسات غير الأقليدية، فهم عند محاولتهم البرهان على المسلمة الخامسة توصلوا إلى اكتشاف استقلالها عن غيرها من المسلمات الخاصة بالمستقيم والسطح والتطابق وغير ذلك مما يسمح ببرهان الثماني والعشرين نظرية الأولى في أقليدس دون ما يليها مما يحتاج إلى المسلمة الخامسة. فأدركوا عندئذ أن برهان استقلال المسلمة س عن المجموعة س إنما معناه عدم تناقض س مع لا س وهذا هو ما أدى إلى هندسة ريمان مثلاً. ومنه أخذ هـلبرت تعريف استقلال المسلمة. هذا هو رأى هـلبرت في معنى استقلال المسلمة .

ولكن يعترض بعض الرياضيين على فكرة الاستقلال نفسها فيقولون إذا كانت كل مسلمة مستقلة حقاً في معناها عن غيرها في

طائفة من المسلمات فإنه يتمتع الاستنباط بسبب عدم الاشتراك أو الاتصال بين معاني مسلمات الطائفة المذكورة. وإذن فلا بد أن يكون هناك إشتراك ما - لا استقلال أو انفصال تام - بين طائفة من المسلمات بحيث يمكن استنباط قضايا أو نظريات منها. وهذا الاشتراك ربما أمكن فهمه في ضوء التمييز الذي ذهب إليه الرياضى الإيطالى **بيو ليفى** (Beppo Levi) بين الاستقلال المطلق والاستقلال المريب (Independ Ordonnee) أما الاستقلال المطلق فمستحيل معه الاستنباط لأن المسلمات تكون حينئذ غير مشتركة فى شىء ما، أما الاستقلال المريب فهو الذى إذا توافر لدينا **أ ب ج** كطائفة من المسلمات لنظرية ما، يريد ببساطة أن يقول إن **ب** لا تنتج عن **أ** وإن **ج** لا تنتج عن **ب** أى أن هناك ترتيبا فى الاستقلال كما هو واضح. وهذا لا يمنع بالطبع إمكان استنباط **أ** من **ب** و **ج** معا، ومثل هذا هو ما يسمح بالاشتراك بعض الشئ فى المعنى .

على كل حال يبدو أن الاستقلال خاصية نسبية واقتصادية وجمالية فى آن واحد أكثر منها خاصية حقيقية أو منطقية أو أى شئ آخر من هذا القبيل، أما أنها نسبية فلأنه لا يمكن أن يكون هناك استقلال مطلق لما يؤدى إليه مثل هذا الاستقلال من امتناع الاشتراك فى المعنى مع بقية مسلمات الطائفة. أما أنها اقتصادية

فلأنه من الاقتصاد الفكرى أن لا تكرر مسلمة شيئاً مما تقوله الأخرى فيكون هناك الحد الأدنى فقط من المسلمات. أما أنها قيمة جمالية بالإضافة إلى ذلك فيرجع إلى أن فى الاقتصاد جمالا وأناقة كما فى استقلال المسلمة استقلالاً نسبياً كذلك. على كل حال ليس هناك رأى حاسم فى هذا الشرط.

بقى الإشباع وهو أقل الشروط حظوة فى مناقشات هلبيرت. وأول معانيه عنده هو أن طائفة معينة من المسلمات تكفى بمفردها بالقيام بمهمة استنباط قضايا أو نظريات فرع معين من فروع الرياضة.

ثم توسع هلبيرت بعد ذلك فى معناه بحيث تضمن فكرة أن أية مسألة أو نظرية تثار فى داخل فرع ما يجب أن يفصل فيها بالسلب أو بالإيجاب على أساس تلك المسلمات نفسها. وتحديد هذه الفكرة عسير بعض الشيء ولكن يمكن القول بأنه يريد أن يقول إن فرعاً رياضياً ما إنما تصل مسلماته إلى درجة الإشباع إذا تعذر لقضية ولنقيضها معا أن ينتجاً فى آن واحد عن المسلمات. على كل حال لا تزال مسألة الإشباع موضع نقاش مفتوح لدى الرياضيين.

نرى من هذا أن الشروط الثلاثة وهى عدم التناقض والاستقلال والإشباع، متصلة متداخلة فيما بينها وأنها لا تزال موضع نظر من قبل من يهتم الأمر بحيث يعسر أن يبت فيها بكلمة نهائية وفاصلة

من وجهة نظر الرياضيين أصحاب الشأن.

والآن بعد هذه الجولة فى صميم الأبحاث الخاصة بتأسيس الهندسة لا نقول إننا استنفدنا كل ما يمكن أن يقال عن هذه المسألة من تفاصيل كثيرة من وجهة نظرة المناهج. ولكني أعتقد أنني جلوتُ الكثير مما غمض من مسائل، وروضت الكثير مما يستعصى فهمه إلا على الرياضيين، وبينت أن المطلوب الأول فى فلسفة الرياضة الإحاطة بالأسس البعيدة التى تستند إليها الهندسات، كما بينت الفارق بين موقف القدماء وموقف المحدثين، وأن موقف المحدثين الذى سماه المنطقة النسق الاستنباطى الفرضى إنما درسناه تحت الاسم المفضل عند الرياضيين وهو «الأكسيوماتيك»، وبينت كيف أن الحركة الأكسيوماتيكية التى تميزت باتجاهات عديدة إنما ثمرتها الأخيرة الحاسمة، ابتعاد الهندسات عن الحدوس المكانية والبراهين المستندة إليها مع التحامها وثيقا بالمنطق الصورى وحده بحيث أصبحت المسلمات مجرد علاقات منطقية بالغة التجريد والبعد عن الأشكال المكانية إلى حد أن رياضيا مثل بوانكاريه اقترح قواميس للمسلمات والحدود الأولية لإمكان ترجمة هندسة إلى أخرى، وبينت فى خاتمة المطاف الشروط المنطقية لإقامة نسق من المسلمات المنطقية المجردة على ذلك النحو، تلك الشروط التى ما كانت توجد وتوضع موضع

البحث لولا أن أصبحت المسلمات مجرد علاقات منطقية صرفة. ومن كل هذا يتضح أننا عندما نبحث في منهج الهندسة فمعنى ذلك أننا نؤسسها كنسق استنباطي على مسلمات لا تمت للواقع الخارجى بصلة وإنما فقط إلى المنطق الصورى وحده، وهذا ما يضىء فكرة الحقيقة الهندسية بضوء جديد فى إطار نظرية عامة للمعرفة الرياضية مؤداها أن التصورات الرياضية تصورات من طبيعة منطقية أو صورية بحتة.

الفصل الخامس

تحسب الرياضة وأكسيوماتيك العدد

- (١٥) الجبر والهندسة التحليلية
- (١٦) النقد الباطني في التحليل ينتهي إلى نبد فكرة الاتصال الهندسي» ويستعوض عنها بالأعداد
- (١٧) دور الأعداد التخيلية في تحسب الرياضة.
- (١٨) برنامج المذهب الحسابي ومثال رد الأعداد التخيلية إلى الأعداد الصحيحة.
- (١٩) رد الأعداد الصماء إلى الأعداد الصحيحة.
- (٢٠) نظرية الأعداد اللامتنتهية دعم للمذهب الحسابي.
- (٢١) أكسيوماتيك العدد.

إن ألفاظ هذا العنوان ستنتضح فيما بعد. ونبدأ الآن من القول بأن الخطوات التي تتبناها من النقد الداخلى إلى الأكسيوماتيك الحديث فى الهندسة يمكن أن نتبع مثليتها فى علم «التحليل» (Ana-lyse).

لقد كان **ديوفانت** Diophante الرياضى الإسكندرى صاحب الكتاب المعروف باسم «ارتماطيقا» (Arithmetique) أى الحساب، أول من تعرض لفكرة إيجاد كم مجهول له نسبة ما، إلى كميات أخرى معلومة، ولكنه وقف فى معالجته لمثل هذه الفكرة (التي أثمرت الجبر) عند الطرق الفيثاغورية التي كانت ترمز لكل عدد بخط أو بشكل هندسى أكثر تعقيدا والتي كانت تحل البراهين الهندسية محل العمليات الحسابية المعهودة الآن.

وما سبب ذلك إلا لأن رموز الأعداد والعمليات لم تكن معروفة فى حضارتى اليونان والإسكندرية، كما أنه فى ما عدا منطق أرسطو الذى استعمل حروف الهجاء للدلالة على حيود القياس لم تعرف تلك الحضارات القديمة استعمال حروف الهجاء للدلالة على الأعداد. فكان **ديوفانت** «يتكلم» الجبر ولكنه لم «يكتبه»، مع العلم بأن كتابة الجبر حيوية بالنسبة إليه ولا غنى عنها فيه لأنها جوهره ولبابه. ورغم

ذلك فإن طريقة **ديوفانت** التي لم تستند إلى رموز جبرية وهى طريقة إستخراج كم مجهول له نسبة إلى كميات معلومة هى الطريقة التى امتدحها **ديكارت** أبو الفلسفة والرياضيات فى العصر الحديث فى كل مؤلفاته كطريقة مثلى للرياضة وأسماها لأول مرة «تحليل القدماء» (Analyse des Anciens) فأصبحت كلمة «التحليل» منذ ذاك الاسم الغالب فى الاستعمال العلمى عند الأوروبيين للدلالة على الجبر والرياضة العليا بما فيها أيضا الهندسة التى تعالج بالطرق الجبرية. وعرف الهنود أيضا تلك الطريقة وكان **براهما جيتا** (Bramagup) (a) يستعمل الألوان المختلفة رمزا للمجهولات .

ولكن الجبر فى وجوده الحقيقى كعلم ذى موضوع خاص إنما ندين به فى الحقيقة إلى عالم من علماء بغداد عاش فى القرن الثالث الهجرى (= التاسع الميلادى) هو **محمد بن موسى الخوارزمى** الذى حرّف الأوروبيون اسمه الأخير إلى لفظ **لوغارتم** Algorithme للدلالة أيضا على هذا العلم الذى اكتشفه وإن كان هذا اللفظ أطلق فيما بعد على فرع محدد من الحساب الرياضى . فقد استخلص **الخوارزمى** من طريقتى الهند و**ديوفانت** معا فكرتى «الجبر والمقابلة» ليبدل بهما على طريقتين خاصتين باستخلاص المجهول: واللفظ الأول الذى قدر له الخلود كما يؤخذ من معناه فى اللغة العربية هو أن

يُجبر أو يُكمل كل طرف من طرفى المعادلة، وذلك بأن تنتقل المقادير الناقصة من طرف إلى آخر بالزيادة فلا تبقى فى الطرفين غير الأعداد بالزيادة. وأما المقابلة فهى طريقة أخرى تقوم على حذف المقادير المتماثلة أى «المتقابلة» فى طرفى المعادلة، وهاتان طريقتان توقَّف قيام الجبر على استخلاصهما ومراعاتهما ويفنيان عن البراهين الهندسية.

ولكن **الخوارزمى** كان «يتكلم» الجبر أيضا لأنه لم يهتد إلى الرموز الهجائية. لذلك يقترن الجبر فى العصر الحديث باسم مكتشف آخر هو الرياضى الفرنسى **(فيت Vite)** الذى عاش قبيل ديكارت بنحو نصف قرن فهو أول من خلص تلك الطريقة من استعمال ألفاظ اللغة وحتى من أعداد الحساب حين استعمل حروف الهجاء للدلالة على الأعداد وحين أدخل بعض العلامات الدالة على العمليات التى تجرى على تلك الحروف. فاشتر ذلك كله أنه ميز عما كان يسمى حينئذ Logistica Numerosa أى حساب العدد وهو علم الحساب، العلم الآخر المسمى Logistica Speciosa أى علم الأنواع (باعتبار أن الحرف الهجائى بمثابة نوع لأعداد غفيرة) أعنى علم الجبر والرمز، وارتفع بهذا الأخير إلى مرتبة من التجريد والعموم لاتعهد فى الحساب العددي، واتضحت بذلك قوانين أو علاقات بين

المقادير العامة بطريق المعادلة لم تكن ميسورة في حساب الأعداد
 مثل قانون الاقتران (Law of association) الخاص باختلاف اقتران
 الحدود داخل الأقواس بحيث لا تتغير القيمة التي يشير إليها طرفا
 المعادلة كما في :

$$(أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)$$

وكذلك مثل قانون التوزيع Law of Distribution الخاص
 بالتوزيع بين الجمع والضرب كما في :

$$(أ + ب) (ج + د) = أ ج + أ د + ب ج + ب د$$

ولكن جبر فيت سرعان ما توقف أمام عقبات جاءت من اقتران
 الجبر والعمليات الجبرية في ذهنه بالأشكال الهندسية التي لم
 يستطع فيت التخلص منها. وفي هذا يقول الرياضي **برنجشيم**
 Pringsheim في دائرة المعارف الرياضية التي ظهرت تحت إشراف
 الرياضي **مولك** Molk باللغة الفرنسية في أوائل القرن العشرين
 والتي استعرضت أجزاء الرياضيات كلها مسلسلة مرتبة، يقول (في
 المجلد الأول ص ٤٠) : «إن **فيت** هو الذي علمنا كيف نحسب
 بالحروف الدالة على الأبعاد دون أن نخرج عن حدود النظر في
 الحروف نفسها. وذلك باستعمال رمز خاص يسمح بأن نطبق
 العمليات الرياضية على الحروف كما لو كانت الحروف ممثلة لأعداد

معينة. ثم إن **فيت** هو صاحب الفكرة فى تجديد طريقة القدماء (الإشارة إلى طريقة **نيوفانت**) وذلك بإذابتها فى الجبر الجديد. ولكن **فيت** وقف مع ذلك فى منتصف الطريق عند خطوته الأولى وذلك لأنه لم يعرف كيف يتخلص على نحو كاف من التفسير الهندسى للعبارات الجبرية ذلك التفسير الذى كان مألوفاً عند القدماء، فهو عندما جعل حرف **أ** مثلاً فى مقابل خط مستقيم، بدا له أن يجعل (**أ**) ، (**أ**) مثلاً فى مقابل المربع، و (**أ.أ**) فى مقابل المكعب... هذه المقابلات منعتة من أن يعطى للعلم الذى بعثه وجدده كل ما هو جدير به من صفة العموم والتجريد».

هذه الفقرة المقتطفة من كلام **برنجشليم** التى تبين فضل **فيت** فى إدخال الحروف الجبرية، وأيضاً فى استعمال رموز للعمليات وبذلك استقام له الجبر كعلم، تبين فى الوقت عينه لم توقف **فيت** عند خطواته الأولى نتيجة لاقتران هذه الحروف والعمليات التى تجرى عليها بأشكال هندسية تقابلها بالضرورة، مما حد من قدرة هذا العلم عندما لا توجد أشكال هندسية لأعداد أو عمليات مثل **أ^٤** إذ الخيال يعجز أن يجد شكلاً هندسياً بعد المكعب المعبر عنه بالعدد **أ^٣** أو (**أ.أ.أ**).

إن هذه الفقرة التى تبين عدم استطاعة **فيت** التخلص من

الهندسة حين كان يفكر جبرا، هي فقرة هامة جدا من وجهة نظر أبحاثنا القادمة لأنها تبين كيف أن الجبر أو علم التحليل كله لا يمكن أن يتقدم إلى الأمام، إلا إذا تخلص نهائيا عند تأمل رموزه - حروفا وعملیات من النظر في أشكال هندسية، أى عندما يتخلص من «حدس المكان» كما يصطلح كانط الذى سبق أن عرضنا نظريته وأثرها في الفكر الحديث فيما يختص بأسس الرياضه.

وفي الواقع إنما يرجه الفضل في تخليص الجبر من العوائق الهندسية إلى رينيه ديكارت في اكتشافه للهندسة التحليلية التي حولت الرياضه الحديثه كلها من النظر في أشكال مكانية إلى النظر في التحليل الذي هو تنسيق عام لكل العلاقات الموجوده بين المقادير أيا كان نوعها، فأحلّ ديكارت التحليل بذلك المحل الأول في الرياضيات الحديثه وتراجعت الهندسه من مكانتها القديمه في الرياده أو القيادة للفكر الرياضى. ونقطه البدء في هندسه ديكارت هي التي عبر عنها في أوائل كتابه المسمى «الهندسه» حيث يقول : «كل مسائل الهندسه يمكن أن يعبر عنها على نحو يكفى معه أن نعرف عددا معيناً من الخطوط المستقيمه لكى نحصل على التركيب المطلوب الحصول عليه، وكما أن الحساب يرد إلى أربع أو خمس عمليات فكذلك الهندسه ترد بالمثل إلى العمليات نفسها، نجريها على

خطوط مستقيمة ينظر إليها كأنها أعداد فحسب. وعلى هذا فإذا كان \bar{a} و \bar{b} يمثلان خطين مستقيمين فإن $\bar{a} + \bar{a}$ أو $\bar{a} \times \bar{a}$ لا يمثلان مستطيلا أو مربعا وإنما خطا مستقيما نسبته إلى \bar{a} كنسبة \bar{b} إلى الوحدة (وحدة القياس) وكذلك العوامل والجذور والأسس فإنها تمثل جميعها خطوطا مستقيمة. وبالجملّة نتائج العمليات هي دائما مستقيمات».

وهكذا لم تعد الهندسة تلعب دورا جبريا كما هو الشأن في تصور فيث، ولكن لا يمنع هذا من استعمال العبارات الهندسية الدارجة مثل مربع ومكعب وغير ذلك للتعبير عن رموز جبرية مثل \bar{a}^2 و \bar{b}^3 الخ.. على شريطة ألا نفهم من هذا التعبير إلا خطوطا مستقيمة فحسب كما يريد ديكارت.

إن هذا الرأي الذي عبر عنه ديكارت في أوائل كتابه «الهندسة» هو من وجهة نظر تاريخ الرياضيّة أكثر ثورة مما يبدو للنظرة العادية ذلك لأنه استبعد كل الأشكال الهندسية من النظر في التحليل، عدا المستقيم طبعاً، كما أنه وضع أهم مبادئ مقابلة الأعداد للإحداثيات، أعنى تقابل مستقيم ما لى عدد مهما تكن طريقة الحصول على ذلك العدد: فالعدد \bar{a} يقابله مستقيم وكذلك العدد $\bar{a} + \bar{b}$ أو العدد $\bar{a} \times \bar{b}$ أو العدد $\sqrt[2]{\bar{a}}$ الخ.. وهذا هو بداية الرياضيّة الحديثة.

يمكننا الآن أن نشير في مثال محدد إلى موقف الهندسة

ب	ص	أ	س
١	١	١	س
٢	٢	٢	ص
د	ج		

التحليلية التي هي ثمرة
التخلص من الحدس الهندسي
(الأشكال المكانية) بحيث
يصبح النظر قاصرا على رموز
الجبر دون حاجة إلى الرجوع
إلى الهندسة وبراهينها في حل
مسائل التحليل.

$$\text{فالمعادلة } (س + ص)^2 = س^2 + ٢ س ص + ص^2 .$$

يقتضى حلها في الهندسة التقليدية أن يرسم الشكل الرباعي أ ب
ج د الذي يضم الأشكال الرباعية :

$$١ + ٢ + ٢ + ٢$$

أما في الهندسة التحليلية فلا ننظر في أشكال مربعة ولا نتجاوز
النظر في مجرد مستقيمات نرمز إليها على الترتيب:

$$س^2 + ٢ س ص + ص^2$$

وهذه المستقيمات تمثلها أعداد فحسب وتذكرنا «بالامتداد»
الديكارتي الذي جعل منه ديكارت جوهر العالم المادي أو الخارجي
في فلسفته .

إنه منذ الهندسة التحليلية أخذت الرياضيات تخطو إلى الأمام بخطى سريعة. قال زينثن (Zeuthen) الرياضى ومؤرخ الرياضة : «إنه منذ ديكارت انتقلت الرياضة من مرحلة الحرفة الصغيرة إلى مرحلة الصناعة الكبيرة» وهو يقصد بذلك أن اكتشاف ديكارت فتح أمام الرياضيين كل وسائل التقدم السريع المطرد لأن الرياضة لم تعد حبيسة الأشكال الهندسية بعد أن تحولت إلى تحليل وانطلقت مع انطلاق الأعداد المختلفة الكثيرة التى لا تمثلها أشكال هندسية ما تعوق التفكير الرياضى وتحد من قدرته .

لقد خطا التحليل بعد ديكارت خطوات واسعة فنشأ حساب التكامل والتفاضل وتقدمت نظرية الدوال (Theory of Functions) طوال القرنين السابع عشر والثامن عشر. وكلها اكتشافات عظيمة الأهمية نسكت عنها هنا لأنها لا تهمنا من وجهة نظر نشأة النقد الباطنى. فى التحليل ومسالمة المناهج والأسس أو الأصول التى تقصد إليها هنا. ذلك لأن الانتباه إلى مثل هذه الموضوعات الأخيرة عند الرياضيين أنفسهم لم يظهر إلا فى أواسط القرن التاسع عشر، عندما أخذ الرياضيون يهتمون بالجانب المنهجي والمنطقى للحساب والتحليل. فهم إلى ذلك الوقت كانوا يثقون كل الثقة ويركنون فى أطمئنان لا مزيد عليه إلى النتائج الباهرة التى توصلوا إليها بواسطة

التحليل فى الهندسة التحليلية وحساب التكامل والتفاضل ونظرية الدوال التى نمت كلها على مر الأيام وطبقوها هم أنفسهم بنجاح موفور فى مختلف ميادين العلم الطبيعى الجديد دون أن يكثرثوا فى الوقت عينه أدنى اكتراث لنقدها وفحص أسسها التى تستند إليها وبالجملة لمناهجها.

وفى الواقع كان تقدم الرياضيات منذ القرن السابع عشر رهنا بتقدم الطبيعيات وخاضعا لحاجاتها إذ كانت الطبيعيات هى التى تملى على الرياضيين الحاجة إلى المزيد من الكشوف الرياضية، ففنع الرياضيون بإسهامهم فى حل مشاكل الطبيعيات وإشباع حاجاتها أولا بأول دون أن يشعروا بحاجتهم هم أنفسهم إلى نقد مناهجهم الرياضية وفحص أسس عملهم ومواجهة حاجات الرياضيات فى ذاتها مستقلة عن الطبيعيات. فكانت الرياضيات إلى ذلك العهد تتألف من قطع متناثرة لا وحدة بينها ولا يتبع فى نظرياتها المتباعدة نهجا موحدا حتى قال رياضى إنجليزى حديث هو فيليب جوردين (Philip Jourdain) فى بحث مسلسل وممتاز عن أسس الرياضة Foundation of Mathematics فى مجلة العلوم الرياضية ١٩٣٠ : «إنه إلى منتصف القرن التاسع عشر لم يكن علم أضعف منطقا من علم الرياضة». فلا عجب إذن إذا رأينا الفلاسفة الذين اهتموا

بالرياضة قبل ذلك الوقت قد ذهبوا مذاهب شتى فى طبيعتها وأصولها وطرقها، فجاءت نظرياتهم غير مقبولة وغامضة. وأحيانا ضد تقدم الرياضيات أيضا، وساعدت بذلك كله على إشاعة الغموض عند الكثيرين من الفلاسفة والرياضيين المحدثين الناظرين فى أسس الرياضة .

(١٦)

فى الوقت الذى نشأت فيه هندسات غير أقليدية فى أواسط القرن الماضى، نشطت أيضا معاول الهدم فى التحليل وكانت نظرية الدوال theory of Functions هى مركز ذلك النشاط ولذلك سنتخذها نقطة البداية لحركة النقد الداخلى فى التحليل كما اتخذنا من قبل المسلمة الخامسة عند **أقليدس**، بداية لحركة النقد الداخلى فى الهندسة .

لقد كانت فكرة «الاتصال الهندسى» Continuite Geometrique هى الجذر البعيد والمشارك بين الهندسة والتحليل، وفكرة «الاتصال الهندسى» هذه اصطلاح حديث عند الرياضيين، ولكنه يدل على شىء قديم فى الفكر الرياضى إذ يدل على الكم الذى سُمى منذ **أرسطو** متصلا فى مقابل الكم المنفصل (العدد)، ولكن يجب الآن أن نفهم فقط من هذا الاصطلاح ذلك المستقيم الذى استبقاه **بيكار** فى

هندسته التحليلية بعد أن استبعد الأشكال الهندسية الأخرى، وعلى وجه أدق يجب الآن أن نفهم من ذلك الاصطلاح عدم وجود أدنى فجوة أو انفصال (Discontinuite) في تتابع قيم دالة من الدوال كما تتتابع نقط مستقيم ما دون فجوة بينها مما يستبقى دائما حدسا بخط متتابع النقط سواء أكان الخط مستقيما أم منحنيا، أعنى بالطبع يستبقى حدسا هندسيا ما .

ولقد رأينا كيف أن التصور الأكسيوماتيكي الحديث في الهندسة قد تخلص من الحدس الهندسى أو المكانى (نقطة - خط - سطح) بأن أحاله إلى فكرة «الطوائف المنطقية» Classes logiques وما يتبع هذه الفكرة من إقامة علاقات منطقية فى صورة مسلمات (الفقرة ١٢)، أما التحليل فقد كان يعتمد كل الاعتماد أيضا على ذلك الحدث الهندسى للاتصال الذى استبقاه ديكارت فى هندسة التحليلية أو الجبرية كما وضحناه. فنظرية الدوال كلها إلى منتصف القرن الماضى، إنما كانت تعبر عن هذا الاتصال الهندسى وتستمد منه وجودها. ولفظ «دالة» Function من وضع الفيلسوف الرياضى ليبنتز وقصد به المنحنى Curve الهندسى الذى يعبر عن علاقات «متصلة» متتابعة بين كمّين متغيرين (Variables) *س* و *هـ* يسميان بالإحداثيين Coorodinales كما يقال فى اصطلاح الرياضه. فلو

أخذنا مثلاً عوضاً عن S و H شيئين محددين مثل حرارة الغاز والضغط، فإن العلاقة التي تنشأ من تغير أحدهما عند تغير الآخر ترسم خطاً «منحنياً» هو «دالة» في عرف الرياضيات وهذه الدالة «متصلة» اتصال الخط المنحني الهندسي بحيث أن الدالة تكون لها قيمة معينة في كل نقطة من نقاط المنحني، وبعبارة أخرى هي تجتاز قيماً عديدة متتابعة لا فجوات فيها أي تُعتبر خطاً هندسياً.

طبعاً عدد التجارب عن الحرارة أو الضغط محصور ولكن الخط الداخلي الذي يربط بين التجارب المحصورة العدد يمثل أعداداً متتابعة واتصالاً هندسياً لا فجوات فيه، وهذا هو معنى «الاتصال» الذي تقتصر الكتب الباحثة في أسس الرياضيات على ذكره بهذا الاسم فقط (Continuum) أو بوصفه بأنه «الاتصال الهندسي» - Geometri-cal Continuity (أو حتى حدس الاتصال أو الحدس المكاني أو الهندسي).

ولم يحدث أن رياضياً قبل أواسط القرن الماضي ارتاب في قيمة هذا الحدس الهندسي الذي تقوم عليه فكرة الدالة حتى بين أنشد الرياضى الفرنسى كوشى Cauchy أن هناك دوالاً غير متصلة بل منفصلة على عكس شهادة الحدس الهندسي مما كانت تنبؤ عنه أنشد العقلية الرياضية وأسماها «الدالة المنفصلة» - (Fonction Discoti-

(nuc) فنشأ عن اكتشافه هذا أن تعرّض الحدس الهندسى للاتصال، أعنى تعرض الاعتقاد ببدايته، إلى الزعزعة وعدم الثقة فيه أو الركون إليه فى علم التحليل. لأن الاتصال الذى كان خاصية الدالة ولبابها أصبح الآن شيئا غير ملازم لها بل هو عَرَضٌ قد يعرض لها أحيانا فقط، إذ بمناسبة أية دالة يحدث دائما التساؤل : أهى متصلة أم منفصلة؟ وهكذا افتتح كوشى بداية الطريق إلى تحرير التحليل من الحدود الضيقة التى أسره فيها الحدس الهندسى للاتصال زمنا طويلا . فلم يلبث أن فرّق بعد ذلك أيضا الرياضى الألمانى فيرستراس Weierstrass المعاصر لكوشى، بين فكرتى الاتصال

و«التفاضل» (Differenciación) اللتين كانتا متلازمتين متماسكتين فى التفكير الرياضى إلى ذلك الوقت، وذلك عندما اكتشف دالة متصلة ولكنها لا تقبل التفاضل، من جهة أخرى نجح ريمان Reim-ann فى تكوين دالة «منفصلة» فى عدد لا ينتهى فى الانفصالات بين نقطتين ما، ومع ذلك فإن تلك الدالة تقبل التكامل (Integration) على عكس ما يشهد به الحدس. مثل هذه الاكتشافات المتعاصرة وغيرها برهنت للرياضيين ضرورة نبذ الحدس الهندسى الذى تمثله فكرة الاتصال كأساس سليم للتحليل. وخلفت عندهم الحاجة إلى إعادة النظر فى جميع أفكارهم ومبادئهم وأنظارتهم القائمة على وضاحة أو

حدسية الاتصال المكانى أو الهندسى، كما أنها حسمت فى ضرورة استقلال التحليل عن حدس الاتصال أعنى عن ذلك الخط الهندسى الذى استبقاه **ديكارت**، وجعلت التحليل يأخذ على عاتقه ولحسابه الخاص إعادة النظر فى كل مبادئه وأصوله ومناهجه، وكما قال الرياضى الألمانى إذ ذاك **لوجين دير شليه** (Lejeune Dirichelet) فى كلمة مشهورة تقتطفها المؤلفات المختلفة هى : «أصبح اتجاه التحليل أن يحل الأفكار (Idees) محل الحساب (Calcul) .

هنا نلمس تماما الحاجة الملحة عند رياضى ذلك العصر إلى التخلّى عن الحدس الهندسى برُمته، أعنى حتى عن ذلك الخيط الرقيق الذى استبقاه **ديكارت** كمستقيم، فاستبقاه علم التحليل فى نظريته فى الدوال تحت عنوان الاتصال الهندسى. إن هذه الحاجة الملحة فى التخلص من حدس الاتصال إذا تمت - وستتم طبعاً كما سنرى - فإنها تذكرنا بما لحق الهندسة ذاتها من تخلص من الأشكال الهندسية ومن التجائها آخر الأمر إلى عناصر منطقية صرفة كفكرة الطوائف لمنطقة Classes والعلاقات التى تقوم بينها مما سبقت الإشارة إليه (فقرة ١٢) وهذا هو بالضبط الطريق الذى ينتظر التحليل أيضاً منذ ثورته على حدس الاتصال، ولكن طريق التحليل أطول وأشق كما سنرى.

فلنعد إلى كلمة **ديرشليه**، إن مغزاها هو أن علماء التحليل فى مرحلة تنقيية علمهم من حدس الاتصال إنما ولوا وجوههم شطر الأسس والأصول التى يقوم عليها علمهم ناقدين وفاحصين، على عكس من سبقهم من علماء التحليل الذين لم ينتبهوا إلى هذه الناحية بل اتجهوا دائما الاتجاه الآخر والطبيعى، أعنى ناحية تنمية علمهم بالاكشافات وإمداده بأنواع من الحساب جديدة لينهض بتبعاته حيال تقدم العلوم الطبيعية. وذلك الاتجاه الجديد النقدى الفاحص للأسس والمبادئ أمد الرياضة القائمة فعلا بأفكار جديدة لأسسها على خلاف الاتجاه الآخر الذى يمدّها بالمزيد من أنواع الحساب. وهذا هو مغزى عبارة **ديرشليه** التى سنتوسع فيما يلى فى تفصيلها وفهمها .

(١٧)

إن الاتجاه الجديد الذى عبر عنه **ديرشليه** أحسن تعبير، أصبح مفروضا أو محتوما على الرياضيين منذ امتداد فكرة الدالة إلى ميدان العدد التخيلى Imaginary number أى المركب Comeplex . لقد قيل إن **كوشى** Cauchy كان يستمد كل قوته الرياضية مما كان يخيف غيره من الرياضيين أعنى من الأعداد التخيلية أو المركبة. والواقع أن إحدى مفاخره فى الرياضة أنه وسّع من أفق نظرية

الدوال بأن وضع دالة أحد إحداثيها عددا تخيليا وأسمائها الدالة التحليلية Fonction Analytique .

لقد كان العدد التخيلي معروفا من قبله، فقد أسماه **ديكارت** بهذا الاسم كما أسماه **ليبتنز** بالكم المستحيل Quantite Impossible ويسمى أيضا العدد المركب لأنه يشتمل على عددين حقيقيين (Reels) وأبسط الأعداد التخيلية هو جذر المعادلة .

$$x^2 = -1$$

وإلى منتصف القرن التاسع عشر كان الرياضيون ينظرون نظرة استغراب إلى مثل هذا العدد الذي يشير إلى وجود كم متناقض مثل $\sqrt{-1}$ ولكن منذ أن أدخل **كوشي** علامة (i) كرمز للعدد التخيلي $\sqrt{-1}$ (والرمز هو الحرف الأول من اسم العدد باللغة الفرنسية، ويستبدل في اللغة العربية بالحرف الأول من اسم اللفظ المقابل له أعني بالحرف ت) انساق **كوشي** بضرورة المحافظة على القواعد الجبرية إلى إدخال الأعداد المركبة التي من نوع :

$$a + bi$$

حيث أ و ب عدنان حقيقيان أيأ كانا. ثم عمد إلى استعمال مثل هذا الكم المستهجن معند الحدس كواحد من المتغيرين Variables أو الإحداثيين في الدالة فتكونت بذلك «الدالة التحليلية» التي سخر منها

الرياضيون بادیء ذی بدء وتوقعوا عدم فائدتها، ولكنها ما لبثت أن أثبتت قيمتها في العلوم الطبيعية كما أمدت علم التحليل بنظرية أوضح مما لو كان قد ظل قاصرا على الأعداد الحقيقية والأعداد الصماء (Irrational) فحسب، حتى أن رياضيا فرنسيا معاصرا درس زمنا في جامعة القاهرة هو هادامار Hadamard يقول في مقال له في دائرة المعارف الفرنسية الجديدة التي ظهرت بعض أجزائها قبيل الحرب الثانية «إن أقرب بُعد بين واقعيتين في العالم الحقيقي غالبا ما يمر بعالم العدد المركب». ونحن دون أن نتوقف أكثر من هذا عند الكلام عن الدوال التحليلية التي لها الآن مكانة أولى في التحليل المعاصر يمكننا أن نلمح لماذا انساق الرياضيون بالطبيعة إلى النظر في الأسس العددية أو الحسابية للتحليل بدلا من الأسس الهندسية التي يمثلها حدس الاتصال . وكما يقول برنشفج Brunschvicg في كتابه القيم «مراحل الفلسفة الرياضية» : إن القرن التاسع عشر قرن الأعداد التخيلية، إنما جدد التحليل باستعماله لتلك الأعداد، وذلك التجديد ليس فقط هو إضافة عنصر جديد (عنصر العدد التخيلي) وإنما هو تجديد لحق الأسس والأصول أي لحق نقطة البداية في التحليل». والتجديد الذي لحق الأسس والأصول والذي يشير إليه برنشفج إنما هو امتداد وتعميم لفكرة

العدد وإحلال للعدد محل فكرة الاتصال الهندسى كأساس يقوم عليه التحليل كله من الآن فصاعداً. وهكذا على حد تعبير مشهور الرياضى **فيليكس كلاين** Felix Klien وصف به حركة مماثلة فى ألمانيا قام بها الرياضيان **فيرستراس** Weierstrass و**كرونكر** Kro-necker وصارت العبارة عنواناً معبراً عن تلك الحركة التى أطلت العدد محل الاتصال الهندسى فى كل الكتب التى تتحدث عن تلك المرحلة فى تاريخ الرياضة : «أصبح التحليل «متحسباً» (L'Analyse S'est arithmetisée)، وتلك كلمة وضعناها عنواناً لهذا الفصل ولكنها لا تستقيم تماماً فى اللغة العربية مع أنها ضرورية لكى نبقى على وحدة الاصطلاح فى اللغات المختلفة، ثم لكى نفهم كيف أن التحليل الذى كان معتمداً على الحدس الهندسى للاتصال تخلى عنه واستعاض عنه بالحساب العددي المعروف، يستمد منه جذوره البعيدة ويرد إلى أعداده الصحيحة (Entiers - Integers) وبدون إخلال بقواعد ذلك العدد التخيلي المستهجن، ووضح أن ذلك الارتداد إلى الحساب كفيل بطرد كل حدس هندسى من علم التحليل وبإكسابه أيضاً وضوحاً ونقاءً و يقيناً.

يقول الفيلسوف **برنشفيج** فى كتابه «مراحل الفلسفة الرياضية» :
إن علم الرياضة باتخاذ فكرة العدد الصحيح الإيجابى أساساً له

يستطيع أن يدعى بحق، أنه طرد من العلم الرياضى كل غموض وشك». تلك هي وثيقة ميلاد المذهب الحسابى (Doctrine Arithmeti- sante) المشهور فى تاريخ الرياضىة أثناء الربع الثالث من القرن الماضى والذى كانت رسالته رد التحليل إلى الأعداد، وتأسيسه على علم الحساب المعروف، ليكتسب التحليل يقينا مستمدا من يقين الأعداد ومبتعدا بذلك كله عن جدس الاتصال الهندسى الذى استبقاه ديكارت ثم تحطم شيئا فشيئا كأساس سليم وثيق للتحليل كما رأينا.

(١٨)

لقد تكلمت إلى الآن عن نشأة التحليل وارتباطه بالهندسة حتى منتصف القرن التاسع عشر، ثم عن حركة النقد الباطنى التى بدأت فى نظرية الدوال وحطمت العنصر الهندسى الكامن فى أعماق التحليل متمثلا فى جدس الاتصال، وارتدت بالرياضيين من النظر فى أهداف الرياضىة وتنميتها إلى النظر فقط فى أصولها وأسسها لتتقيتها من روابطها الهندسية. ثم تكلمت عما تمخضت عنه هذه الحركة النقدية الباطنة من «تحسيب التحليل» أى إقامته على نظرية الأعداد وهذا هو الموضوع الذى نرى الآن أن نتوسع فى فهمه بعض الشئ، لأنه يتصل مباشرة بمسألة أسس الرياضىة ومنهجها .

هذا الاتجاه نحو تأسيس الرياضيات على الأعداد الصحيحة المعروفة إنما ظهر ونما في فرنسا وألمانيا معا وتبعهما فيه رياضيو البلاد الأخرى، ولقد عبر عنه الرياضى الفرنسى **جول تانرى Jules Tannery** فى كتابه «نظرية الدوال نوات المتغير الواحد» عام ١٨٨٦ بقوله : «يمكن تكوين التحليل كله على أساس فكرة العدد الصحيح الإيجابى وفكرة جمع الأعداد الصحيحة، وليس هناك ما يدعو إلى الالتجاء إلى أية مسلمة أخرى أو إلى أي مدد من التجربة [= الحدس الهندسى] وفكرة اللامتناهى $L'infini$ التى يجب أن لا تظل من الآن فصاعدا سرا معميا فى الرياضة ترد إلى ما يأتى : بعد كل عدد صحيح يوجد عدد صحيح آخر»...

هكذا يرى هذا الرياضى أن التحليل أو قل الرياضة كلها إنما ترد إلى مسلمات الحساب وحده وهى العدد وعملية الجمع دون حاجة إلى مسلمات أخرى كأسس للتحليل. كما يثير بنوع خاص مشكلة نوع محدد من الأعداد برز بحدة فى ذلك الوقت هو الأعداد اللامتناهية $L'infini$ فذهب للدهشة الشديدة إلى أنها لم تعد لغزا لأنها ترد إلى نظرية حساب الأعداد الصحيحة نفسها .

وهكذا نرى أنه عندما يعتنق رياضى ما ذلك الاتجاه فى تحسيب التحليل تنشأ عنده بالضرورة المسألة الشائكة، وهى كيف يمكن

للأعداد الأخرى غير الصحيحة المستعملة في التحليل كالأعداد السالبة والأعداد الصماء والأعداد التخيلية والأعداد اللامتناهية وغيرها أن ترد إلى الأعداد الصحيحة الإيجابية؟

لقد استنفدت هذه المسألة مجهودات ضخمة. وأثارت نظريات إضافية جديدة معقدة وتعريفات دقيقة للتصورات التحليلية الأساسية كالاتصال Continuum والدالة Fonction والحد Limit واللامتناهى L'infini وغيرها. وافتتح البحث في هذه المشاكل كلها في أن واحد

فيراستراس في جامعة برلين و**ميراي** Meray في جامعة ديجون بفرنسا. وهما بطلا المذهب الحسابي وعنهما أخذ رياضيو عصرهما. لقد كان هذان المؤلفان يجهلان المنهج الأكسيوماتيكي الذي بعثه إذ ذاك معاصرهما **مورتز باش** (وقد تكلمنا عنه سابقا بمناسبة الهندسة) فلجأ المؤلفان المذكوران إلى ما سمي في ذلك الوقت بالمنهج التكويني Methode Genetique وتبعهما في ذلك أعلام عصرهما في الرياضة أمثال **ديدكند** Dedekind و**كرونكر** في ألمانيا و**مولك** Molk و**جول تانري** Tannery في فرنسا .

والمبدأ الذي يقوم عليه المنهج التكويني أو التوليدي هو كما يعرفه **جول تانري** على النحو الآتي «إن فكرة العدد تتكون بواسطة تعميمات متتالية. والقضايا الخاصة بالعمليات الأربع الأساسية

مطبقة على الأعداد الصحيحة تكون موضوع أول فصول الرياضة أى الحساب. ثم ندخل بعد ذلك الدوال التى يمكن أن ينظر إليها كزوج Couple من الأعداد الصحيحة، فنطبق على هذه الأعداد الجديدة تعريفات تلك المعادلات والخواص الأساسية التى يتعرض إليها الحساب وفى بداية الجبر ندخل فكرة جديدة هى فكرة الأعداد النسبية Nombres Relatifs أى الأعداد التى تسبقها دائما علامة (+) وعلامة (-) وهنا أيضا نطبق على هذه الأعداد الجديدة تلك التعريفات والخواص الأساسية السالفة... وهكذا يستمر تانرى فى إدخال الأعداد المختلفة شيئا فشيئا كالأعداد الكسرية والصماء والدائرة والتخيلية واللامتناهية وغيرها مع الاحتفاظ ببقاء العمليات وتعريفاتها. ثم يختتم كلامه كما يأتى : «إن الأمر الهام هو أن تتكون الرياضيات شيئا فشيئا بحيث نتجنب فى كل مراحل تكوينها على أساس العدد وحده أى التجاء إلى الحدس التجريبي (Intuition empirique) وعندما ننهج هذا النهج فإن التعريفات المتتابعة للأعداد والعمليات تكون مجردة وصورية لأنه لا حدس هندسياً فيها...» .

طبعاً لا يتسع المقام هنا لاستعراض كل خطوة من خطوات المذهب الحسابى فى ضوء ذلك البرنامج الحافل الذى تحدث عنه جول تانرى. ولكن يجب مع ذلك أن نعطى هنا على سبيل التمثيل

مجرد إحساس عن كيف أنه استنادا إلى الخطة التكوينية التي ذكرناها عن **تاترى** يمكن رد الأعداد التخيلية بالذات - التي أثارت مسألة تحسيب الرياضه - إلى الأعداد الصحيحة .

يقول **ميراي Meray** الذى له الفضل فى افتتاح هذه الحركة: «إذا كانت بعض الرسوم الهندسية تمدنا لهذه المقادير التخيلية برموز مناسبة، فإنه لا ينتج عن ذلك أنه توجد علاقة ما بين تلك الرسوم والأعداد التخيلية أكثر مما توجد علاقة بين ظاهرة طبيعية ما والمنحنى الذى يمدنا بصورة بصرية ترمز إليها. وليس هناك ما يدعو إلى بذل مجهود ضائع فى النفاذ إلى معنى الرمز $\sqrt{-1}$ الذى لا معنى له فى الواقع لأن الكم السلبى لا يمكن أن يكون له جذر تربيعى» .

فالكلم المرموز له بعلامة $\sqrt{-1}$ ليس كما قلنا إلا تأليفا من عديدين حقيقيين (أ ، ب) مرتبين بهذا الترتيب نتفق بالاصطلاح على أن نُجرى عليهما القواعد المعروفة فى الحساب العادى والتي تثبت لهما خواص الاشتراك (Association) والتبادل (Commutation) والتوزيع (Distribution) وغير ذلك وهنا نترك **ميراي** واستعراضه الرياضى البحث وتلجأ إلى الفيلسوف المنطقى **لويس كوتوراه** - Couturat الذى أعطى تخطيطا مبسطا لهذه النظرية فى كتابه المسمى

«اللامتناهى الرياضى» L'infini Mathematique على الوجه الآتى

١- نسمى عددا تخيليا، المجموعة المكونة من عددين حقيقيين مرتبين ترتيبا معينا. فليكن العددان الحقيقيان a و b فتكتب مؤقتا العدد التخيلى على الصورة الآتية :

$$(a, b)$$

٢- تعريف المساواة : العددان التخيليان يتساويان عندما تكون الحدود المتناظرة متساوية. وعلى هذا فإن المعادلة:

$$(a, b) = (a', b')$$

إنما تعنى المعادلتين .

$$a = a' \quad \text{و} \quad b = b'$$

٣- تعريف الجمع

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

٤- تعريف الطرح

$$(a, b) - (a', b') = (a - a', b - b')$$

ونرى من هذا فى نفس الوقت أنه لكى يتساوى عددان تخيليان

يجب أن يكون الفرق بينهما صفرا. فإذا كان

$$a - a' = 0 \quad \text{و} \quad b - b' = 0$$

$$(0, 0) = (a - a', b - b') \quad \text{فإن}$$

٥- نظرية

$$(أ، ب) \times ن = (أ ن، ب ن)$$

حيث ن عدد صحيح ما .

٦- تعريف الضرب : حاصل ضرب عددين تخيليين هو العدد الذى نحصل عليه بتأليف حدودهما وفقا للصيغة الآتية التى هى قاعدة نسلم بها هنا تسليما .

$$(أ، ب) \times (أ'، ب') = (أأ' - بب'، أب' + أ'ب)$$

لنتف قليلا عند هذه القاعدة السادسة الخاصة بالضرب وعند القاعدتين التاليتين (٧ و ٨) لأنها تعدنا بما يميز المقادير التخيلية .
إن حاصل ضرب عددين تخيليين لا يمكن أن يكون صفرا إلا إذا كان أحد العوامل أو كلها صفرا .

فلكى يكون لدينا

$$أأ' - بب' = ٠ \quad \text{و} \quad أب' + أ'ب = ٠$$

يجب أن يكون

$$أ = ١ \quad \text{و} \quad أ' = ١ \quad \text{و} \quad ب = ٠ \quad \text{و} \quad ب' = ٠$$

حينئذ تكون الصيغة العامة للضرب

$$(٠ + ٠، ٠ + ٠)$$

٧- حالة خاصة لما تقدم فى إذا كان $أ = ٠$ فإن الصيغة العامة

للضرب تكون

$$(١, ١) \times (١, ٠) = (١, ١)$$

وهذه النتيجة هي بعينها كما لو كان المضروب فيه عددا حقيقيا
كما في القاعدة الخامسة .

$$(١, ١) \times (١, ١) = (١, ١)$$

وإذن فمن الطبيعي أن نعتبر العدد التخيلي الذي يكون حده
الثاني صفرا، هو بعينه العدد الحقيقي الذي يتكون منه حده الأول إذ
هو يلعب نفس الدور في حالة الضرب.

أما إذا استعملنا في الصيغة (رقم ٧) السالفة $١ = ١$ مع
استبقاء الصفر كقيمة ب١ فسنحصل على

$$(١, ١) \times (١, ٠) = ١$$

وهذا يدل على أن العدد التخيلي $(١, ٠)$ هو نموذج الضرب
للأعداد التخيلية ويختفى كعامل من عوامل الضرب في حالة الضرب.
ويمكن من هذه الجهة تشبيهه بالعدد الحقيقي $+ ١$ في حالة الضرب
المألوف .

٨- وعلى عكس ذلك يكون العدد التخيلي $(٠, ١)$ عاملا لا

يختفى في حالة الضرب ولا يمكن تجاهله لأن

$$(١, ٠) \times (٠, ١) = (٠, ١)$$

وبصفة خاصة

$$1 = (0, 1) = (1, 0) \times (1, 0)$$

وعلى هذا فإن العدد التخليى (1, 0) مضروباً فى نفسه أى ما

يسمى تربيع العدد التخليى هو عدد يساوى العدد الحقيقى - 1 .

وهذه هى النقطة الهامة التى نريد أن نصل إليها لنبين أن $\sqrt{-1}$

هو العدد المركب (1, 0)

لنلاحظ أيضاً ملاحظة هامة وهى أن العدد التخليى (1, 0) (ب)

يمكن أن يعتبر حاصل جمع لعدد صورته (1, 0) و (0, 0) (ب)

بمعنى أن يجمع بين عدد حقيقى وعدد تخيلى صرف. من جهة أخرى

كل عدد تخيلى صرف يساوى لحاصل ضرب عدد حقيقى بعدد

تخليى هو

$$(1, 0) \times (0, b) = (1, 0) \times (0, b)$$

يمكن إذن أن ترد كل الأعداد التخليية إلى الوحدة التخليية (1, 0)

(1) التى نرسم إليها تبسيطاً للكتابة بالحرف i فنكتب الأعداد

التخليية كما يأتى :

$$a + bi \text{ (وبالفرنسية } a + bL \text{)}$$

وهو عدد ثنائى نطبق عليه كل القواعد الجبرية إذا اتفقنا على

مراعاة الصيغة المشار إليها بالنجمة (*) فى الفقرة الثامنة فتحصل

منها على

$$ت \times ت = ت^2 = ١ -$$

فبفضل هذه الصيغة الأخيرة نجد أن الرمز $ت$ يمثل الجذر التربيعي للعدد -١ وهو العدد الذي حل محل العدد التخيلي $(١، ٠)$ وتأخذ $(١، ب)$ عمليا الصورة $\sqrt{١ + ب^2} - ١$ أو $١ + ب^2$.
ولكن ما يهمنا دائما هو أن ندرك أن العدد التخيلي أصبح على هذا النحو عددا حقيقيا تنطبق عليه كل قواعد الجبر العادي .

ويتضح من هذا المثال أنه لكي يعمم العدد الصحيح ويمتد إلى إذابة العدد التخيلي فيه يوضع الرمز $(١، ب)$ الذي تألف من عددين حقيقيين. ثم نعرف بعد ذلك المساواة والجمع والطرح والضرب. وبعد هذا يمكن بيان أن نظريات الحساب العادي تظل مستقيمة في حساب الأعداد التخيلية. وعلى هذا النحو نفسه تمتد فكرة العدد الصحيح إلى الأعداد الأخرى الكسرية والنسبية والصماء والدائرة الخ .

(١٩)

من الأعداد التي يجب أن نتوقف عندها الأعداد الصماء ومشكلة ردها إلى الأعداد الصحيحة. لقد اصطلح العرب على أن يضعوا في مقابل العدد الذي سموه «المنطوق» وهو الذي ينتهي في جذرها

التربيعى ويقبل القسمة بأعداد منتهية. العدد «الأصم» الذى لا ينتهى جذره التربيعى ولا قسمته ومن ذلك أيضا العدد الدائر .

ليس من الصعب إذن فى حالة الأعداد الصماء أن ندرك لماذا اصطدم تعميم العدد الصحيح بصعوبات جمة ناجمة عن طبيعة العدد الأصم ذاتها إذ هو عدد كما وضع لنا الآن لا يمكن تحديده أو تعريفه بعدد ينتهى من الأعداد المنطوقة بل يحتاج دائما إلى سلسلة لا تنتهى من هذه الأعداد ولقد لفتت هذه الصعوبات أنظار الرياضيين حتى فى العصر القديم فحاولوا رد الأعداد الصماء إلى الأعداد الصماء إلى الأعداد الصحيحة لكى يعطى الرياضيات ما هى جديرة به من المعقولية والوضوح. فهم إذن حاولوا «تحسيب» الرياضة (Arithmetisation of Math.) أيضا قبل ظهور هذه الحركة - التى وصفناها - فى منتصف القرن الماضى .

لقد كان الفيثاغوريون أول من لاحظوا أن النسب بين بعض الأبعاد وخاصة بين الوتر وأضلع المربع نسب صماء (انظر فقرة ٦) أى لا تقاس بالأعداد الصحيحة. فذكر لنا أفلاطون أن تيودور القورينائى أثبت أن $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ و $\sqrt{6}$ الخ أعداد صماء، كما أن صديقه **طيطاوس** نظر فى العدد الأصم بصفة عامة . وبدلا من أن يمتد القدماء أو يحاولوا أن يمتدوا بالعدد المنطوق إلى مجال

العدد الأصم على وجه علمى أو بناء على نظرة علمية خلصوا ببساطة إلى عجز علم العدد أو الحساب وفضلوا عليه علم الأبعاد أى الهندسة لكي يقيموا هذه الأخيرة على مسلمات وتعريفات. ومع ذلك فإن اكتشافهم للأعداد الصماء جعلهم يفكرون منذ بداية الرياضة عند اليونان فى تحسيب الرياضة على النحو التالى :

لقد ميزوا علم الحساب الذى موضوعه الأعداد الطبيعية عن اللوجستيقا (Logistique) الذى جعلوا موضوعه جداول عملية تحوى نتائج عمليات حسابية يستخدمها المساح والمهندس والفلكى وغيرهم. وفي هذه الجداول حاولوا أن يتجنبوا الأعداد الصماء وذلك بإثبات علاقات أو نسب بين أعداد طبيعية فحسب. فهى جداول تعطى مثلاً أقرب سلسلتين من الأعداد الطبيعية لعدد أصم معين أحدهما أقرب سلسلة إليه بالنقص وأخرهما أقرب سلسلة إليه بالزيادة. فيقع العدد الأصم بينهما. وتلك هي البذرة الأولى فكرة تعميم العدد كما يلاحظ الرياضى برنجشيم Pringsheim .

وفى العصر الحديث أدى كل من جبر فيت وهندسة بيكارث إلى تعميم العدد أيضاً كما سبق أن رأينا من جهة أنهما مثلاً كل بعد هندسى بعدد ما، وتعود الرياضيون على أثرهما أن يوحوا بين العدد والبعد. وقد رسخت بالاستعمال هذه العادة فى العلم الحديث

بعد اكتشاف حساب التكامل والتفاضل بحيث أصبح الهندسيون أنفسهم يتأملون الأعداد مباشرة ويستنبطون من النظر فيها وجدها خصائص الأشكال الهندسية (وهى ليست أعداد) . فمثلا الهندسى لوجاندر Legendre يبرهن عام ١٨٢٢ القضايا الخاصة بالمماثلة أو المشابهة (Similitude) فى الهندسة وذلك بالنظر فى الأعداد التى تمثل أبعادا وبتطبيق نظريات الحساب والجبر على تلك الأعداد. وكان هذا السلوك من جانب الرياضيين يتضمن فى نفسه مشكلة ظلت زمنا طويلا غير ملحوظة عندهم، وهى أنهم باعتمادهم على الأعداد دائما إنما كانوا يعتقدون على «الاتصال الهندسى» ويتجاهلونه تماما بل ويعملون على نقيض ما كان يشهد به الحدس الهندسى عندهم.

وإلى منتصف القرن التاسع عشر توهموا أنهم إنما تغلبوا على تلك المشكلة بافتراضهم أنه ليس فقط لكل بعد عدد يقابله، بل بافتراضهم أيضا الفرض العكسى وهو أن لكل رمز عددى يحصلون عليه بتأليف اللوغارتمات الممثلة لأعداد مختلفة الأنواع (النسبية أو التخيلية أو الصماء الخ...) يوجد بُعد يقابله بالضرورة أيضا. والرياضيون الذين تشككوا فى الوضوح الهندسى لذلك الفرض لما رأوا استحالة الانتقال من الأعداد إلى الأبعاد انتقالا منطقيا. صرفا أو بصفة يقينية وثيقة لجأوا إلى وضع مسلمة صريحة فى صلب

الرياضة دون برهان عليه باعتبارها مسلمة (لا نظرية) تسمى مسلمة **كانتور وديكند** (Pastulat de Cantor - Dedekind) تبرر هذا الانتقال وتضع ضرورته وضعا. كما أنهم اجتهدوا من جهة أخرى فى تقصى أنواع الأعداد وفى تكوين سلسلة منها محكمة الحلقات فى تسلسلها ابتداء من الأعداد الصحيحة لكى يزيّدوا علمهم التحليلى يقينا ونقاء من الأبعاد الهندسية. وهذا ما أدى إلى التعمق فى فكرة الأعداد الصماء التى نحن بصدها هنا لكى يربطوا إليها الأبعاد الهندسية بواسطة المسلمة السابقة الذكر. ذلك لأن العدد الأصم الذى لا يتناهى كالدائر مثلا بدا لهم أنه هو الذى يمثل الأبعاد الهندسية التى يشهد بها الحدس لأن فى العدد الأصم عملية لا تنتهى أى مستمرة أو متصلة وكأنها بذلك تمثل ذلك الاتصال (Con-tinuum) المعبر عن الهندسة .

ولقد كانت نتيجة ذلك التعمق فى الكشف عن طبيعة الأعداد الصماء أنهم رأوا فيها إحدى نظريتين : الأولى نظرية الحد (Limit) الذى تقف عنده السلسلة اللامتناهية لأعداد صماء (نظرية ميراي - فيرستراس - كانتور Cantor) والثانية نظرية القطع (Cut أو Coupure) بين مجموعتين لا متناهيتين (Deux ensembles infinis) من الأعداد الصماء (نظرية ديكند - كرونكر - تائرى) فأصبحت فكرتا الحد

والقطع منذ ذلك الوقت، الجسرين اللذين يعبر أحدهما أو الآخر كل رياضى للانتقال من الأعداد المنطوقة أو الطبيعية إلى الأعداد الصماء الممثلة للأبعاد الهندسية بالمسلمة المذكورة، وبذلك ربطت الهندسة بالأعداد نهائيا عن طريق الأعداد الصماء التى ترد بإحدى الفكرتين الحد أو القطع - إلى الأعداد المنطوقة .

ما هي نظرية الحد أولا ؟

لقد أدخل الرياضى كوشى Cauchy قبل ذلك بسنوات فكرة «الحد» ليدل على ما يأتى : عندما تقترب القيم المتعاقبة لمتغير ما اقترابا شديدا من قيمة ثابتة معطاة مقدما بحيث لا تفرق عن هذه القيمة (الثابتة) إلا بأقل ما تشاء من القيم فإن هذه الأخيرة (الثابتة) تسمى الحد لكل تلك القيم والعدد الأصم عند كوشى هو حد بهذا المعنى فهو حد للكسور المختلفة التى تمدنا بقيم تقترب شيئا فشيئا من هذا الحد .

لكن ميراي Meray هو الذى جاء بالتعبير الرياضى للعدد الأصم على أساس فكرة الحد. فهو يطلق لفظ المتغير Variante على سلسلة لا متناهية من الأعداد المنطوقة "1" "2" "3" ... "n". فإذا كانت هذه المتوالية عند n هى أقل من عدد منطوق ما، هو α مهما يكن هذا الأخير صغيرا فإننا نقول إن ذلك المتغير «متجمع» Convegrente

عند الحد ϵ وللتعبير عما سبق برموز الرياضة يكتب V للدلالة على المتغير المتجمع للمتوالية " $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ " بحيث أنه ابتداء من n يكون:

$$V - \epsilon < n$$

هذا إذا كان للمتغير المتجمع حد.

ولكن إذا لم يكن له حد فيجب أن نضع له «حدا مثاليا» (Limite Ideale) نسميه الكم الأصم. فالعدد الأصم عند ميراي هو حد مثالي يتجمع فيه متغير ما. كما يمكن القول بأن التجمع لأي متغير إنما هو الميل نحو حد ما سواء أكان الحد حقيقياً أو مثالياً.

أما النظرية الأخرى التي تعتمد على فكرة القطع (Theory of cut) فيقول ديكنسون إنه يمكن أن نقطع أو نفصل على أنحاء لا متناهية مجموعة ما من الأعداد المنطوقة إلى مجموعتين اثنتين أ و ب بحيث يكون كل عدد من المجموعة أ أقل من كل عدد من المجموعة ب ومثل هذا الفصل نسميه «قطعا» في مجموعة الأعداد المنطوقة .

ولا يخلو هذا القطع من أحد أمرين : الأمر الأول هو أنه يوجد عدد ما سواء في أ بحيث يكون أكبر أعداد هذه المجموعة أو في ب بحيث يكون أصغر أعداد هذه المجموعة. فنجعل عندئذ القطع يقابل ذلك العدد الذي نحصل على تعريفه وتعيينه بواسطة المجموعتين أ و ب . وهذا بالطبع عدد منطوق لأننا لا نعرف بعد إلا هذا النوع من

العدد. والأمر الثانى هو أنه لا يوجد عدد ما سواء فى أ بحيث يكون أكبر أعدادها. أو فى ب بحيث يكون أصغر أعدادها. فنتفق عندئذ على أن نضع للقطع رمزا عدديا يقابله وفى هذه الحالة يكون الرمز معبرا عن عدد أصم. وبما أن تلك المقابلة تسمح للرموز التى نحصل عليها على ذلك الوجه بأن نقارنها فيما بينها وكذلك بأن نقارنها بالأعداد المنطوقة، فمن الطبيعى أن نقول بأن الرموز الجديدة تمثل أعدادا، كالأشأن فى الأعداد المنطوقة نفسها. على كل حال يصبح العدد الأصم فى هذه النظرية مجرد اصطلاح على قطع، ورمز له تجرى عليه العمليات كلها.

ومهما يكن من أمر تفضيل الرياضيين لنظرية من النظريتين السابقتين على الأخرى فيما يختص بالعدد الأصم، فإن الأمر الهام من وجهة نظرنا فى هذه الدراسة المنصبة على أسس الرياضة هى أن «تعميم» فكرة العدد الحقيقى وامتدادها إلى جميع الأعداد كالتخيلية والصماء، أصبح أمرا واقعا على أيدي رياضىّ الربع الثالث من القرن الماضى. فهؤلاء الرياضيون الذين تعرضوا لتحسب التحليل، بينوا إمكان تركيب أو تأليف الأعداد كلها ابتداء من العدد الصحيح وحده والامتداد به. أعنى بيقينه. إلى كافة الأعداد. وبما أن أحداثيات الدوال تتضمن يوما خليطا من تلك الأعداد فيمكن القول

بأن التحليل أصبح من ذلك الوقت متحسبا (Arithmetise) ولا
يحتاج إلى حدس الاتصال الهندسى.

فلنختم كلامنا عن هذا المذهب الحسابى بكلمة هادامار -Hada-
mard أستاذ الرياضة بجامعة باريس والذي درّس بجامعة القاهرة
أيضا وهى :

«إن الرياضة اليوم بدلا من كلمة باسكال القائلة : بأن ما تقبله
الهندسة فهو مقبول عندنا فى الرياضة كلها. تحل محلها كلمة أخرى
هى أن ما يقبله الحساب فهو مقبول رياضيا عندنا ... وإذا كان كل
شئ فى الرياضة متولد اليوم أو مستخرج من فكرة العدد الصحيح
فُلنحى مع بوانكاريه تحية وداع أخير فكرة الاتصال الهندسى التى
كانت وحدها فيما مضى قادرة على مثل ذلك التولد والإخراج».

(٢٠)

لقد أضفى المذهب الحسابى على رياضيات ذلك العصر التى
كانت مهلهلة، تسلسلا جميلا وتماسكا بديعا جامعا لفروعها
ونظرياتها ابتداء من الأعداد الصحيحة وعملياتها التى تؤلف علم
الحساب. فانتشر يقين هذه ووضوحها شيئا فشيئا إلى جميع أنواع
الأعداد والنظريات التى تتناولها الرياضة وذلك على أساس المنهج

التكويني أو التوليدى الذى استخرجها جميعا من الأعداد الصحيحة. مستبعدا بذلك كل حدس هندسى بحيث أصبحت الهندسة نفسها بمقتضاه نظرا فى أعداد وحسب. وقد احتاج ذلك كله إلى مزيد من نظريات تتفاوت تعقيدا كالتى شرحناها .

ولكن لم يكن المذهب الحسابى الكلمة الأخيرة والوحيدة فى هذا الإتجاه الذى يضاف على الأعداد كل هذا اليقين الرياضى. فهذا المذهب الذى استتمَّ تكوينه فى غضون الربع الثالث من القرن الماضى، إنما لقي من خارجه ومن اهتمامات غريبة عنه توطيدا وتدعيما وذلك بظهور «نظرية المجاميع» (Theorie des Ensembles) أو (Theory of Sets) التى جاء بها الرياضى الألمانى جورج كانتور Georg Cantor ونشرها من ١٨٨٣ إلى ١٨٩٥ وتدعى نظرية المجاميع للمذهب الحسابى من جهتين :

الأولى أن نظرية جورج كانتور أكدت نزعة الربع الثالث من القرن الماضى فى تأسيس الرياضيات كلها ومنها الهندسة على أساس الأعداد الطبيعية بحيث تشيد الرياضيات كلها على أساس علم الحساب المعروف. ذلك لأن نظرية المجاميع نظرية تعمقت الحساب نفسه، وكشفت عن نظريات جديدة ومعقدة أضفت عليه قدرة عظيمة على حل الكثير من أعوص مشاكل الرياضيات العليا التى لم يكن لها

حل إلى ذلك الوقت .

أما الجهة الثانية فهي أن نظرية المجاميع وسّعت من أفق فكرة العدد ذاته عندما أضافت إلى سلسلة الأعداد الصحيحة المعروفة لدينا والتي أسمتها العدد المنتاهي (Finite Number) سلاسل من الأعداد الجديدة تجيء بعد تلك السلسلة المنتهية واسمها الأعداد العابرة أو المتجاوزة للمنتهى (Transinite Numbers) ونكتفى بأن نسميها الأعداد اللامتناهية الكبر أو «الأعداد اللامتناهية» فحسب. ولقد سلح هذا النوع الجديد من الأعداد علم الحساب بأجنحة ضخمة جعلته يحلق بعيدا في سماء اللامتناهى الذى حير الفلاسفة والرياضيين منذ القدم. منذ زينون Zenon الإيلى تلميذ بارمنيديس رأس المدرسة السقراطية (سقراط وأفلاطون وأرسطو) حتى الربع الأخير من القرن الماضى. وهاتان الجهتان تؤكد ولا ريب للمذهب الحسابى جاءه من واد بعيد عنه ومن اهتمامات مخالفة لاهتماماته. فنظرية المجاميع دعم للمذهب الحسابى ولو من خارجه لأنها أكدت أهمية الأعداد .

ونحن نون أن نتعرض لتأريخ فكرة اللامتناهى عبر القرون نقول فى اختصار أن الفارق بين تناولها طوال العصور وبين تناول جورج كانتور لها، هو الفارق بين الجدل الفلسفى الذى يحلل أفكارا غامضة

والمعالجة الرياضية التي تعالج أعدادا على أساس عمليات حسابية. ولم يكن من الممكن أن تنضج فكرة اللامتناهى لتصاغ فى أعداد وعملياتها، إلا بعد أن نضج الفكر الرياضى فى القرن الماضى لتقبل الأعداد وحدها كأساس للرياضة وبعد أن نضجت فكرة الأعداد نفسها بأنواعها المختلفة عند الرياضيين.

لقد أقحم **زينون الإيلى** فى القديم فكرة اللامتناهى ليحتج على استحالة «الحركة» التى نادى بها **هرقليطس** بدلا من السكون أو الوجود الثابت الذى نادى به أستاذه **بارمينيدس**. وخلاصته احتجابه أن السهم مثلا الذى ينطلق من قوسه إلى هدف ما، لا يمكنه أن يفارق قوسه على حد زعمه، لأن عليه أن يقطع أولا نصف المسافة إلى الهدف وقبل ذلك نصف النصف، وقبل ذلك نصف النصف، والنصف وهكذا يتراجع التقسيم إلى ما لا نهاية. ولا يمكن للسهم حينئذ أن يقطع ما لا ينتهى من الانقسامات. فالحركة باطلة والوجود ساكن ثابت كما قرر أستاذه **بارمينيدس**.

ولقد ناقش **أرسطو** موقف **زينون**، ليبين الزيف فيه فرأى أنه موقف خلط بين ما هو «بالقوة» (أو ما هو بالإمكان قابل للقسمه) وما هو قائم «بالفعل» فالتقسيم الذى لا ينتهى هو عملية ممكنة فقط. ولكن السهم لا يجتاز انقسامات ممكنة وإنما يجتاز مسافة قائمة أو

موجودة بالفعل بين قوسه وهدفه ولذلك فالحركة قائمة .

ولم تحظ الفكرة التى أقحمها زينون فى الفكرين الفلسفى والرياضى، ما هى جديرة به تماما من عناية لصعوبتها فنجد فلاسفة العصر الحديث يتحدثون عن الله تعالى باعتباره كمالاً «لا ينتهى» كما نجد فيوتن يتحدث عن مكان وزمان غير منتهيين، كل ذلك دون تناول اللامتناهى الكبير .. مباشرة. ولكن ربما كان بولزانو Bolzano فى القرن التاسع عشر، أول من ركز انتباهه على تمحيص هذه الفكرة تمحيصا رياضيا عندما وضع أمام كل عدد من سلسلة الأعداد الصحيحة (١، ٢، ٣...) وهى لا تتوقف بالطبع عند نهاية ما. عددا زوجيا من سلسلة الأعداد الزوجية المتضمنة فى السلسلة الأولى (٢، ٤، ٦...) وهى بالطبع نصف أعداد السلسلة الأولى ولا تتوقف بالطبع عند نهاية كذلك مثل السلسلة الأولى. فاستنتج بولزانو من هاتين السلسلتين اللامنتهيتين المتقابلتين عددا بإزاء عدد. إن خاصية العدد اللامتناهى الكبير هى أن الكل يساوى جزئه على خلاف المؤلف باعتبار أن سلسلة الأعداد الزوجية هى نصف الأعداد فى السلسلة الكاملة .

إن خصائص العدد اللامتناهى التى منها تلك الخاصة التى أشار إليها بولزانو إنما أصبحت واضحة فى نطاق المعالجة

الرياضية التامة للأعداد اللامتناهية عند جورج كانتور فى الربع الأخير من القرن الماضى. ونحن لى نكون فكرة مبدئية عن هذه النظرية الجريئة التى اقتحمت أمنع الحصون الرياضية وأعنى حصون العدد اللامتناهى الكبير، والتى تعتبر بحق أبعد الاكتشافات الرياضية وأعجبها والتى أثارت منذ ظهورها وتثير إلى الآن الأبحاث والنقاش وقسمت الرياضيين إلى معسكرين متنازعين. نقول لى نكون عنها فكرة مبدئية نكتفى بالإشارة إليها من خارجها فنقول إنها نظرية قسمت الأعداد إلى أعداد عادة أو أساسية Cardinal Numbers وإلى أعداد مرتبة Ordinal Numbers. ولكل قسم نظرياته وخصائصه المميزة والمخالفة. ثم قسمت بعد ذلك الأعداد إلى متناهية Finite N. وإلى لا متناهية Transfinite N. فدرست فى كل من هذين القسمين أعداد العاده وأعداد المرتبة. فتنوعت النظريات فى كل منهما كما تكشف فروق شاسعة بين نوعى العدد المتناهى واللامتناهى حتى فى معنى أو قيمة العمليات الحسابية نفسها كالجمع والضرب والقسمة والجذور والقوى والدالة والحد الخ...

ولكى نتبين مغزى أو معنى هذا التنوع والاختلاف بين نوعى العدد فيما يتصل ببعض العمليات الحسابية المعروفة لدى الجميع والتى ذكرنا الآن أسماء بعضها، نقول إن كانتور يرمز بحرف الألف

العبري لأصغر الأعداد المنتهية العادة وسنكتب بدلا عنه حرف أ .
بينما يرمز بحرف W اليوناني لأصغر الأعداد اللامنتهية المرتبة.
إن أصغر الأعداد اللامنتهية العادة المرموز له بحرف أ عدد
يحصر جميع الأعداد المنتهية. بعبارة أخرى إذا اعتبرنا أن كل
الأعداد المنتهية تؤلف «مجموعة» (Set, Ensemble) وهذه المجموعة
لا يمكن بالطبع حصر أفرادها بالاستقراء لأنه مهما وصلنا إلى عدد
صحيح فإنه يوجد بعده عدد آخر. فإن هذه المجموعة لكل الأعداد
الصحيحة التي نرمز إليها بحرف أ هي أول الأعداد اللامنتهية
وأصغرها جميعا .

لننظر الآن في تطبيق بعض العمليات الحسابية المألوفة على هذا
اللامنتهية العاد الأصغر، لتبين عدم جدوى هذه العمليات المألوفة
لدينا في هذا الميدان الجديد ميدان اللامنتهية .

$$أ = أ + أ$$

$$أ = ن + ن$$

$$أ = أ + أ$$

$$أ = ن \times ن$$

$$أ = أ \times أ$$

$$أ = ن$$

الخ...

هذه نظرة عابرة من الخارج إلى نظرية المجاميع بالقدر الذى نفهم به عدم فاعلية العمليات الحسابية المألوفة فى مجال الأعداد اللامتناهية والتي تبين خاصية من خواص اللامتناهى سبق أن تنبه إليها بولزانو، وهى أن الكل يساوى جزءه وهذا واضح من المعادلات السابقة. هذا بالإضافة إلى أن ما ذكرناه عن هذه النظرية يكفى لكى نفهم بعض ما أثارته من ضجيج بين الرياضيين عند تعمقهم هذه النظرية فى كل فروعها واكتشافهم لنقائض Paradoxes فيها حمى الجدل حولها، وأسالت ولا تزال تسيل المداد وحركت أقلام الرياضيين والفلاسفة المنطقيين إلى الآن لتقويم ما اعوجّج من النظرية. وكل هذا يقودنا إلى صميم المسألة الأساسية التى نتبعها دائما هنا وهى مناهج الرياضة وأسسها .

ففيما يختص بالنقائض التى تتضمنها النظرية نذكر على سبيل المثال التناقض الذى تنبه إليه الرياضى الإيطالى بيورالى فورتى Burali Forti وهو أول تناقض ظهر فى النظرية وكان ذلك عام

١٨٩٧.



فالنظرية التاسعة والأربعون فى الأعداد المرتبة اللامتناهية عند كانتور تقول : إن الأعداد المرتبة اللامتناهية يمكن أن ترتب ترتيبا تصاعديا بحيث أنه من بين كل عددين منهما أيا كانا، يوجد دائما

عدد أقل من الآخر وأن أكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية هو آخر سلسلة تلك الأعداد .

فيقول **بيورالى فورتى** إذا أخذنا هذا العدد الأخير كطرف وحيد في المقارنة فلا بد أن يكون وفقا للنظرية نفسها - باعتباره عددا مرتبا لا متناهيا - أقل من عدد آخر لا نعلمه. وإذن فأكثر الأعداد المرتبة اللامتناهية ليس أكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية . وهذا تناقض في هذه النظرية ٤٩.

مثال آخر للتناقض ما كشفه **برتراند راسل** Bertrand Russell الفيلسوف المنطقي المعاصر في نظرية من نظريات **كانتور** في العدد العاد المتناهي التي تقول أن كل عدد منته باعتباره مجموعة (Set) أو Class لا يشتمل على ذاته كجزء منها. فيقول **راسل** إنه يمكن بيان أن عدد الأعداد المتناهية كلها (أى مجموعة كل المجاميع العددية) هو في أن واحد لا يشتمل ذاته ويشتمل ذاته أيضا كجزء من ذاته، وهذا تناقض . فهو لا يشتمل ذاته لأنه أكبرها وفقا للنظرية. ولكنه أيضا يشتمل على ذاته باعتباره مجموعة كغيره من المجاميع، أى إحدى المجاميع التى لا تشتمل على ذاتها. لتقريب هذا التناقض نقول : إذا جمعنا كل فهرس مكاتب العالم فى هذه الحجرة بحيث لا يبقى فهرس خارجها. فنحن لدينا جميع الفهارس (أى كل المجاميع Sets).

للمكتبات. الآن نضع فهرسا لكل الفهارس الموجودة بالحجرة. فهذا هو المجموعة لكل المجاميع. هذا الفهرس الكلى هو فى آن واحد فهرس لكل الفهارس وأيضا واحد من تلك الفهارس باعتباره فهرسا. بعبارة أخرى هو فى آن واحد لا يشتمل على ذاته كجزء لذاته وأيضا يشتمل على ذاته كأحد الفهارس ، وهذا تناقض.

إن آخر ما هنالك من نقائص أخرى تنبه إليها الرياضيون، وواضح أنه يترتب على تلك النقائص وجود خلل ما فى نظريات أو قضايا نظرية المجاميع. يجب إما إصلاحه وإما رفض النظرية الكانتورية برمتها إذا استعصى الإصلاح. وسواء أكان الموقف اللاحق إصلاحا أو رفضا لهذه النظرية فإن الأمر الثابت الأكيد أن المذهب الحسابى قد ظفر من هذه النظرية بتأييدها له بطريق غير مباشر بأن الأعداد الطبيعية هى حجر الزاوية فى تأسيس الرياضيات بما فيها الهندسة عند التحليلين .

(٢١)

تتبعنا إلى الآن خطوات تحسب الرياضة والابتعاد بها نهائيا عن حدس الاتصال الهندسى. ونوهنا بما لنظرية جورج كانتور من فضل فى ترسيخ ألفة الرياضيين للأعداد دون الأشكال الهندسية رغم ما

ظهر من نقائض في هذه النظرية .

وواضح أن الأبحاث في أسس الرياضة لم تتوقف عند الكلمة الأخيرة للمذهب الحسابي القائل بأن الأعداد الطبيعية أو الصحيحة هي كل شيء في الرياضة وإليها يرد كل شيء آخر فيها .

ففي السنوات الأخيرة من القرن الماضي تشعبت الأبحاث في أسس الرياضة عند الرياضيين إلى تيارين. فاما أحدهما فقد ظل مغمضاً عينيه عن نظرية جورج كانتور وبدأ من الكلمة الأخيرة للمذهب الحسابي وهي أن الأعداد الصحيحة هي أساس كل شيء. في الرياضة فلم يشأ هذا التيار أن يتوقف عند هذه الأعداد كنقطة بدء يقينية للرياضة وإنما حاول أن يقيم اليقين الرياضي كله على أساس المنهج المعبد في الرياضة منذ القدم، ألا وهو المنهج الأكسيوماتيكي. فبحث عن مسلمات لسلسة الأعداد تستمد السلسلة يقينها منها ومن ورائها أيضا الرياضيات بحذافيرها كما رتبها المذهب الحسابي وبالطبع في مثل هذا البحث الذي أصبحت المسألة الملحة فيه هي مسألة يقين منطقي، يصبح للمنطق الصوري دور هام في تكوين المسلمات كما لمسنا هذا عند كلامنا عن مسلمات الهندسات .

أما التيار الرياضي الآخر فقد بدأ من نقائض جورج كانتور

وحاول علاجها أو على الأصح حاول تقويم النظرية نفسها بالطرق الأكسيوماتيكية أيضا واستعان كذلك بالمنطق الصورى. وإن كان هذا التيار جزئيا وموضوعيا فى داخل نظرية المجاميع نفسها ومن أجل تقويم النظرية وحدها .

وهكذا وجدت الرياضه نفسها مسوقه بالضرورة عند التماس أساس لليقين إلى الاستعانة بالمنطق الصورى الذى أصبح له منذ ذاك الوقت دور هام فى كل الأبحاث الخاصة بأسس الرياضه.

لقد كان هذا الانشعاب إلى التيارين المذكورين كما قلت بين الرياضيين منذ أواخر القرن الماضى وقد استمر فى القرن العشرين. ولكن ما إن بزغ القرن العشرون حتى التقى التياران المذكوران فى نزعة ثالثة ومخالفة عند بعض الفلاسفة ذوى العقلية الرياضيه هم أصحاب التيار اللوجستيقى أو المنطقى الصرف والذى يؤسس الرياضه على المنطق الصورى وحده. وأشار هنا إلى برتراند راسل وهو يتعهد والآخذين عنهما.

ولقد أحدث هذا التيار المنطقى رد فعل عنيف عند إمام الرياضيين المحدثين فى فترة ما بين الحربين وهو ديفيد هيلبرت أستاذ الرياضه بجامعة برلين (توفى عام ١٩٣٧) فحاول فى تيار رابع أن ينتقل بالرياضه عن المنطق كما حاول ألا يعود إلى أساس كحدس الاتصال

الذى فارقتة الرياضة منذ فترة طويلة فلجأ إلى الطريقة الأكسيوماتيكية وجاء بأكسيوماتيك جديد لا إلى المنطق ولا إلى الرياضة، أعنى بمعالجة لرموز لا تنتسب إلى أى من العلمين المذكورين وحاول أن يشق منه المنطق والرياضة سويا .

ثم ما لبث أن ظهر على المسرح طلائع الرياضيين المعاصرين الذين لم يرضوا عن هذين الأساسين، المنطقى (التيار الثالث) والأكسيوماتيكي (التياران الثانى والرابع) فحاولوا الرجوع بالرياضيات إلى الوراء، إلى ما قبل المذهب الحسابى. فالتمسوا أساسا للرياضيات فيما سبق للرياضيات الحديثة أن تخلت عنه وهو «الحدس الرياضى» كأساس ومنبع أصيل ودائم لها. وبذلك عادوا إلى التقاليد القديمة فى الرياضيات .

فهذه خمسة تيارات أو مذاهب يجب الإشارة إليها لكى نستكمل الصورة التى نكوّنها عن مسألة أسس الرياضة فى الوقت الحاضر. ولكننا نختتم هنا بالكلام عن التيار الأول وحده لأنه مكمل للمذهب الحسابى ولأننا فى هذا الفصل بالذات أردنا بيان مسألة «تحسبب الرياضة» وأكسيوماتيك الحساب». فإلى هذا الأكسيوماتيك نوجه الآن الانتباه.

إذا كانت الكلمة الأخيرة للمذهب الحسابى هى أن الرياضة إنما

ترد بحذافيرها إلى العدد الصحيح، فلا غرابة في أننا نجد رياضى ذلك العصر لا يقبلون كعنصر حقيقى فى الرياضة كلها إلا الأعداد الصحيحة. وهكذا وقف رياضيو ذلك العصر أمام الأعداد موقف الإكبار والتقديس باعتبارها اليقين كله. وهذا ما جعل رياضيا كبيرا مثل **كرونكر** يقول فى عبارة مشهورة : «الأعداد الصحيحة تأتينا من عند الله وكل ما عداها فهو من تأليف الإنسان» .

ولكن الرياضيين الذين حرصوا على تأسيس علمهم على أسس وثيقة بعيدة عن الحدس لم يقتنعوا بنتيجة ثيولوجية كالتى انتهى **كرونكر** حقيقة إن مبدأ ضرورة تحسب التحليل قد أسبغ على العدد الصحيح قيمة مطلقة ووجودا أوليا وموضوعيا أكثر مما أعطى للرموز الرياضية الأخرى التى يتناولها الرياضيون. ولكن ألا يمكن للرياضيات أن تكون مرة أخرى فريسة حدس جديد يجعلنا ننق ببداية الأعداد الصحيحة ونستمد يقين الرياضة من مثل هذه البداهة الحدسية؟ ثم ألا يمكن النظر إلى العدد الصحيح نفسه على أنه غير بديهى إلى هذا الحد وأنه قد يقبل تحليلا آخر يقودنا هذه المرة إلى أبعد من حدود المذهب الحسابى والرياضى بحذافيره ويمكّننا من تأسيس الرياضة كلها على أسس أوثق؟ هذا هو المبدأ الذى يبدو أنه سيطر على كل الأبحاث الخاصة بأسس الرياضة عند الرياضيين

والفلاسفة على السواء. منذ أواخر القرن الماضي وبخاصة فيما يتعلق بأكسيوماتيك الحساب .

فمن الواضح أن تأسيس فكرة الأعداد على أسس أكسيوماتيكية إنما يكسب هذه الفكرة عند أولئك الرياضيين الذين يلجأون إلى هذا المنهج الذى عرفته الرياضة منذ القدم كأوثق منهج لها، إنما يكسبها دقة ووضوحا ويقينا أوفى. ينتشر من المسلمات عبر الأعداد الصحيحة إلى كل أجزاء الرياضة الأخرى باعتبارها قد ارتدت فى المذهب الحسابى نفسه إلى الأعداد الصحيحة .

هكذا نرى **بيانو** Peano أستاذ التحليل بجامعة تورينو يحاول اقتفاء طريقة **موريتز باش** Moritz Pasch أبى الأكسيوماتيك الحديث فيعطينا أهم أكسيوماتيك للعدد إلى الآن، فيختار حدودا أولية ثلاثة هى : الصفر - العدد - التالى Successeur. وخمس مسلمات هى بمثابة العلاقات المنطقية التى تبين استعمال تلك الحدود. ومن ثم الأكسيوماتيك الآتى لنظرية الأعداد :

- ١- الصفر، عدد.
- ٢- التالى لعدد، عدد.
- ٣- ليس لعددین ما، نفس التالى .
- ٤- ليس الصفر، تالياً لأى عدد.

٥- كل خاصية للصفر بما أنها تصدق عليه باعتباره عدداً، فهي تصدق على العدد التالي له، كما تصدق على التالي لما يليه وهكذا، لنلاحظ أن هذه المسئلة الأخيرة هي التي تتضمن اطراد العمليات الحسابية مثل الجمع والضرب مثلاً. وقد سمي هنري بوانكاريه هذه الخاصية «الاستقراء الرياضي» Induction Mathematique أو الإستقراء بالتكرار Induction par recurrence كما أسماها برتراند راسل الخاصية الوراثية (Propriete Hereditaire) للأعداد أى أن ما يصدق على عدد ينتقل بالوراثة إلى غيره .

على كل حال أصبح أكسيوماتيك بيانو كلاسيكيا عند الرياضيين وغيرهم بحيث يدعيه لأنفسهم كثيرون من أمثال بيدكنند مثلاً. كما نجده مذكوراً في كل الأبحاث التي تتحدث عن أكسيوماتيك العدد. وقد قدم لهذا الأكسيوماتيك في مصنفات بيانو تحليل منطقي بالطرق الرمزي (Symbolic) التي أدخلها جبر المنطق في القرن الماضي لقضايا الرياضة بحيث تتحول إلى قضايا منطقية صرفة. وكان هذا كله بالطبع نقطة البداية لقيام اللوجستيقا (المنطق الرياضي) Logis-tique عند راسل في القرن العشرين .

على أن أكسيوماتيك بيانو لم يكن الأكسيوماتيك الوحيد للعدد، إذ يمكن أن نحصى ما لا يقل عن اثني عشر أكسيوماتيك آخر للعدد

عند رياضيين ومناطق من أمثال لانديو Landeau وهلبرت و بانوا Pa-
dox ومنتجون Hantigton وكونج Konig وغيرهم .

ولا يغيب عن البال أن المذهب الحسابي بانتهائه إلى
«أكسيوماتيك العدد» إنما يكون قد أነع ثمرته الأخيرة وأدى رسالته
المنتظرة وهي أن الرياضيات بانتعادها نهائيا عن الحدس المكانى إنما
تصبح علما مجردا وصوريا يقوم على طائفة من الحدود والمسلمات
الأولية التي ترد إليها سلسلة الأعداد الصحيحة ثم ما يليها من
الأعداد كما رتبها المذهب الحسابي .

هذا فيما يختص بأكسيوماتيك العدد الذى ختمنا بنظير له فى
الفصل السابق عن الهندسة عندما تكلمنا عن الأكسيوماتيك فيها .
وكان ينبغى الوقوف عند هذا الحد كما يتضح من إشارتنا فى عنوان
هذا الفصل، لولا أنه لابد من كلمة أخيرة عن التيار الثانى الخاص
بأكسيوماتيك نظرية كانتور . هو تيار موضعى أى خاص بهذه
النظرية وحدها . وقد تزعم زرميلو Zermelo حركة تقويم ما اعوج من
نظرية المجاميع وذلك بتأسيسها على مسلمات، وتبعه فى هذه
المحاولة الأكسيوماتيكية الكثيرون من أعلام الرياضيات المعاصرة
أمثال هاوسدورف Felix Hausdorff وكونج Konig و هاينكل Haen-
kel وغيرهم . وقد حاول هذا التيار تحاشى النقائص التى ذكرنا

نموذجاً لها وذلك بإنشاء النظرية على أساس مسلمات تنتجها دون تناقض بين قضاياها. فاستخرج زرميلو مثلاً المسلمات المتضمنة لها عند كانتور وأضاف إليها مسلمتين، تسمى إحداها مسلمة الانتقاء Axiome de selection وتسمى الأخرى مسلمة الرد أو الإرجاع Axiome de Reductibilite. ومع ذلك لم تسلم المسلمات من نقد الرياضيين كما أنها لم تستطع أن تتجنب النقااض تماماً .

أما التيارات الثلاثة الأخرى فسنفرد لها مكاناً أوسع فيما يلي وسنهتم بصفة خاصة بالتيار اللوجستيقي لصلته الواضحة بالفلسفة ولأنه قطب الرحى بالنسبة للتيارين اللاحقين اللذين يعتبران ردود فعل عليه .

الفصل السادس

المذاهب المعاصرة فى أسس الرياضه

(٢٢) معنى المذهب اللوجستيقى —

(٢٣) معالم تاريخ المنطق الرياضى .

(٢٤) عرض لحساب القضايا الأولية فى اللوجستيقا .

(٢٥) اشتقاق العدد أو نظرية الحساب من ثوابت المنطق

(٢٦) المذهب الأكسيوماتيكى .

(٢٧) المذهب الحدسى والمذهب الحدسى الجديد .

أشرنا فى ختام الفصل السابق إلى أن مسرح الأبحاث المعاصرة فى أسس الرياضة تتنازعه منذ بداية القرن العشرين ثلاثة تيارات هامة، يأتى المذهب اللوجستيقى فى مقدمتها لأنه أسبقها تاريخيا فى ظهوره فوق هذا المسرح. ثم لأن الخلاف حوله هو الذى حدد ظهور المذهبين الآخرين كبرود فعل عليه من قبل الرياضيين وهما المذهب الاكسيوماتيكي بزعامة ديفيد هيلبرت والمذهب الحدسى الجديد بزعامة بروود (Brouwer) .

نريد الآن أن نوجه الانتباه إلى المذهب اللوجستيقى وحده. إنه مذهب اتخذ له أحيانا عند صاحبه برتراند راسل اسم «الفلسفة العلمية» (Scientific Philos.) وهو اصطلاح له ما يبرره، فإن نجاح منهج العلم جعل بعض الفلاسفة يحلمون بفلسفة علمية (دون أن يطلقوا هذا الاسم)، أعنى يحلمون بفلسفة يمكنها إذا اصطنعت لنفسها منهج العلم أن تصل إلى ما وصلت إليه العلوم المتقدمة من يقين ومن نتائج ثابتة تنمو مع الأيام، ومنذ فجر الفلسفة الحديثة حينما كانت الرياضيات أسبق العلوم نضجا نرى ديكارت أبو الفلسفة الحديثة يكرس المنهج الرياضى ويتخذ منهجا لفلسفته وللوصول إلى اليقين حتى فى الطبيعيات. وعلى العكس من ذلك

حينما نضجت الطبيعيات للاستقلال عن أمها الفلسفة عند **فيوتن** نرى فلاسفة متأثرين به من أمثال **لوك** و**هيوم** يدعون إلى منهج التجربة ويلجأون إلى التجربة الحسية وما يستمد منها من معان وأفكار لإقامة حقائق الفلسفة، هناك إذن دائما محاولات متجددة لإقامة فلسفة علمية. بمعنى فلسفة تستند إلى منهج أحد هذين العلمين المتقدمين في الطبيعة بالنسبة إلى العلوم كلها وهما الرياضيات والطبيعيات .

والمذهب اللوجستيقي فلسفة علمية بهذا المعنى، لأنه حين أراد أن يسهم في الحركة الفكرية المعاصرة حول أسس الرياضيات، اصطنع لنفسه أولا وقبل كل شيء آلة رياضية دقيقة لتحليل المسائل المعروضة عليه، هي المنطق الرياضي (المسمى أيضا لوجستيقا) وهو المنطق الذي تسليح بسلاح الرياضة نفسها. أعنى تسليح بأدق الرموز وبالعلاقات الحسابية المختلفة مبتعدا بذلك عن استعمال اللغة والأقيسة اللغوية على غرار أخته الرياضة. حتى أصبح قادرا تماما على التعبير عن قضايا الرياضة نفسها بلغة المنطق وحده وعلى تحليل أسسها التي انتهت إليها في المذهب الحسابي وردها برمتها إلى حدود المنطق وقضاياها الصرفة. فأنبت بذلك المذهب اللوجستيقي نظريته الأساسية بطريقة علمية بحتة لا أثر للفلسفة فيها وهي أن

الرياضيات الخالصة Pure Mathematics ليست إلا فرعاً من المنطق
الصوري ولا شيء فيها غير صور المنطق وحده أي ثوابته Con-
stants وإذا صدق هذا الرأي، فإن التمييز التقليدي بين العلمين
- الرياضة والمنطق - ولو أنه قائم ووطيد، إلا أنه تمييزٌ مُعتسف
ومصطنع.

هذه هي الفلسفة العلمية التي دعا إليها منذ أوائل هذا القرن
الفيلسوف الانجليزي برتراند راسل في كتابه مبادئ الرياضيات
Principles of Mathematics (١٩٠٣).

وتسمى تلك الفلسفة أيضاً (لا عند صاحبها وإنما عند المؤلفين
الآخرين من الرياضيين والفلاسفة الذين يتعرضون اليوم للكتابة في
موضوع أسس الرياضيات) بالذهب اللوجستيقي أو النظرية
اللوغستيقية (Logistic Theory) في أسس الرياضة، وذلك ليس
بالنظر إلى أن هذه العبارة تتضمن الإشارة إلى المنطق الرمزي
Symbolic logic كما اصطلح راسل نفسه. ولكن سميت بالنظرية
اللوغستيقية إشارة إلى شيء أبعد من مجرد المنطق. أعنى إلى تلك
النظرية الأخرى الجريئة القائلة بأن الرياضيات الخالصة ليس فيها
شيء غير عناصر المنطق الصوري وحده. وأنها تشتق منه كفرع له
في نسق علمي واحد ، وكذلك أيضاً إشارة إلى أن حل نقائص

الرياضة المعاصرة التى سبق أن نوّهنا عنا احتاجت إلى قيام نظرية أخرى لهذا الغرض وحده سماها راسل نظرية الأنماط Theory of Types، أدخلها فى ذلك النسق الموحد كطريقة لحل النقائص الرياضية ولم تعرف نظرية الأنماط هذه إلا فى هذا النسق وحده، وهذان الوجهان للمذهب اللوجستيقى - ردُّ الرياضة بحذافيرها إلى المنطق الصورى ثم حل نقائص الرياضة بإقامة نظرية كالأنماط- ليسا من المنطق فى شىء ولا يمتّان بصلة إلى المنطق فى ذاته من حيث هو كذلك إذ هما غرضان زائدان عن حاجة المنطق ويمكن للمنطق أن يقوم بهونهما، ولا يخصان إلا هذه الفلسفة العلمية المعينة التى عرفت «بالنظرية اللوجستيقية» فى كل المؤلفات المعاصرة، ولذلك يجب استبقاء هذه التسمية للدلالة على هذه النظرية. ومع ذلك فإن النظرية اللوجستيقية هذه ليست جديدة كل الجدة ولم تنبع كاملة بحذافيرها من رأس برتراند راسل كما نبعت «بالاس أثينه» من رأس زيوس فى أساطير اليونان فقد سبققتها محاولات جادة فى هذا الاتجاه. ولذلك يستحسن أن نقسم خطوات عرضنا لهذه النظرية على الوجه الآتى :

الخطوة الأولى نخصصها للمحة تاريخية فى معالم الطريق الذى انتقل فيه المنطق الصورى من علم لغوى نقيس فيه بالألفاظ إلى علم رياضى نحسب فيه الاستنباطات كما نحسب فى الرياضة .

والخطوة الثانية إشارة إلى أنواع الحساب المنطقي مع تخطيط لهيكل الحساب الأولى منها الذى يستند إليه البنيان اللوجستيقى كله.

والخطوة الثالثة بيان طريقة اشتقاق الرياضة البحتة من المنطق الصورى وهو الموضوع الأساسى فى فلسفة الرياضة من وجهة نظر هذا المذهب فى بحثنا هذا. مع مناقشة أيضا لبعض نقاط هذا الموضوع .

وبهذا نستكمل الصورة التى يمكن أن نعرض فيها هذه النظرية

(٢٣)

لفظ «لوجستيقا» (Logistica) معروف عند القدماء للدلالة على جداول يجد فيها الحاسبون نتائج العمليات الحسابية جاهزة دون تكبد إجرائها، وتذكرنا بجداول اللوغارتمات اليوم. ثم أطلق استعمال اللفظ منذ مؤتمر الفلسفة الدولى المنعقد فى جنيف عام ١٩٠٤ للدلالة على المنطق المعاصر فى صورته الرياضية. كما يطلق عليه أيضا «المنطق الرياضى» (Mathematical logic) و «المنطق الرمزى» (Synbolic Logic) وتوجد مجلة يصدرها تحت هذا الاسم الأخير اتحاد المناطقة منذ ١٩٣٧ بنجاح كبير فى أمريكا هى (Journal of

أما عند مؤلفي القرن التاسع عشر الذين لهم الفضل في إيقاظ المنطق من سباته الطويل وإرسائه على قواعد حسابية (Calculus) فقد كان الاسم الشائع له هو جبر المنطق (Algebra of Logic).

وفي مجال هذا الجبر سبقت محاولات جادة أيضا عند الفيلسوف والرياضي ليبنتز (Leibinz) في القرن السابع عشر، وكانت كتاباته المختلفة في هذا الموضوع محاولات فيما كان يحلم به من تأسيس علم أعم من الرياضيات، فيه يتحول الاستنباط إلى حساب، سماه حينها الرياضاة العامة Mathematique Universelle وحينها آخر الأبجدية العامة Caractéristique Iniverselle. فهو أول من نظر إلى المنطق كأساس ترد إليه كل معرفة تريد أن تكون يقينية ومنها الرياضيات بالطبع، ولذلك ليس غريبا أن نجد اللوجستيين في بداية أمرهم يؤلفون في منطق ليبنتز وينشرون آراءه المؤيدة لموقفهم. فبراتراند راسل ولويس كوتوراه وتلاميذ بيانو اهتموا جميعا بدراسته وبالتنقيب عن مخطوطاته المنطقية المحفوظة في مكتبة هانوفر حيث عاش. ويعتبر بحق عند اللوجستيين الأب الحقيقي للوجستيقا أكثر مما يعتبر جبريُّو المنطق في القرن التاسع عشر ذلك، لأن ليبنتز اهتم برد قضايا المعرفة وعلى رأسها القضايا الرياضية

إلى المنطق الصوري، وهذه هي النظرية المشتركة بينه وبينهم. ثم إنه بين أنه لا يمكن برهان تلك النظرية إلا إذا توافر مقدما أمران : أداة رمزية وثيقة وحساب منطقي . أما فيما يختص بإدخال الرمز إلى ميدان المنطق فقد كلفت ذلك عبقريته الرمزية في الرياضة التي كانت مثلاً يحتذى عند الرياضيين وعاملاً من عوامل تقدم الرياضيات وانتشارها في أوروبا كلها وتدين له الرياضيات بالكثير من رموزها .

وفيما يختص بالحساب المنطقي فقد عالج معالجات رياضية، طائفة من العلاقات التي لا تُعنى بها الرياضة والتي هي من صميم المنطق، مثل علاقات الذاتية (Identie) والتضمن أو الاحتواء (Inclu- sin) والمساواة واللامساواة وأكبر من. وأصغر من. والفصل. والوصل. وغير ذلك مما يجدد المنطق كحساب رياضي للاستنباطات. فتناول كل علاقة من هذه العلاقات في حساب منفصل. ويعلق

لويس كوتوراه في كتابه القيم عن منطق **ليبنتز** (La Logique de Leibniz) بأن النتائج التي توصل إليها هذا الفيلسوف الرياضي قبل قرنين من ظهور **جورج بول** تشهد بأنه كان أكثر تفوقاً وتقدماً بالقياس إلى ما وصل إليه **جورج بول** Boole مؤسس جبر المنطق في القرن التاسع عشر الذي قدم للوجستيقا.

لم تترك أبحاث **ليبنتز** في جبر المنطق أثراً على المناطقة اللاحقين

وظلت أبحاثه المخطوطة حبيسة مكتبة هانوفر، حتى اكتشفها اللوجستيقيون منذ أواخر القرن الماضي. لذلك نجد أن مواطنه الفيلسوف الكبير **إيمانويل كانط** الذى كتب بعده بنحو قرن تقريبا لم يفتن إلى إمكان تطور المنطق إلى حساب، إذ كان يجهل تماما أبحاث سلفه **ليبنيتز** المبتكرة التى نقلت المنطق خطوة أكيدة وكبيرة إلى الأمام. فقرر فى نظرية غريبة له فى مقدمة الطبعة الثانية من كتاب (نقد العقل الخالص) أن المنطق دخل الطريق العلمى الأكيد وولد كاملا منذ أرسطو، لأنه لم يحتج أن يتقهقر إلى الوراء ليراجع أخطاءه ويصححها، كما أنه لم يأت فيه مؤلف بجديد منذ ولادته. وما سز ولادته كاملا على هذا النحو من أول خطوة له إلا بساطة موضوعه كما يقول حيث لا ينظر للعقل إلا فى صور تفكيره وحسب.

ولكن سرعان ما تبددت نظرية اكتمال المنطق هذه وأصبح المنطق الذى اعتبره **كانط** منتهيا مقفلا على نفسه منذ **أرسطو** أكثر العلوم حركة وتجندا منذ ظهور كتاب **جورج بول** وعنوانه *An Investigation into the Laws of thought* فى عام ١٨٥٤ الذى وضع فيه **بول** أساس نظرية «جبر المنطق» ثم أصبح بعده البحث فى هذه النظرية حركة عالمية اشترك فيها مؤلفون فى إنجلترا من أمثال **جيفنز** **Jevons** و**فن** **Venn** وفى ألمانيا مثل **شرويدر** **Sehroder** وفى

أمريكا مثل شارل ساندريس بيرس Peirce وفي فرنسا مثل لويس
كوتوراه وفي إيطاليا مثل بيانو Peano وتلاميذه الكثيرين، ولا يزال
المرجعان الأساسيان في هذه النظرية، المؤلف الضخم لشرويدر
وعنوانه Algebra der logik (من ١٨٩٠ إلى ١٩٠٥) والكتاب
الموجز القيم للويس كوتوراه وعنوانه Algebre de la La Logique
(١٩٠٥) وبهذين المؤلفين توقفت الأبحاث في هذه النظرية بعد أن
ظهر على المسرح المنطق الرياضى المعاصر (اللوجستيقا) عند
راسل، لأن جبر المنطق هذا اتضح أنه فصل من فصول المنطق
الرياضى يقابل حساب «الفئات» (Calculus of Classes) وبذلك
أصبح جزءاً من نظرية أوسع .

فى جبر المنطق الذى أعاد اكتشافه فى القرن الماضى جورج بول
دون أن يعلم شيئاً إطلاقاً عن كتابات ليبنتز تتغير بعض العمليات
الحسابية عن مثيلتها فى الجبر المألوف وخاصة عمليات الجمع
والضرب، وهذا التغير بالإضافة إلى القوانين المترتبة على تلك
التغيرات أهم ظاهرة فى هذا الجبر .

إلا أن هذا التغير أوقل هذا الانحراف عن المألوف فى الجبر
العادى لم يعد أمراً غريباً فى رياضيات ذلك العصر. فإن المبدأ الذى
كان يعتنقه الرياضيون إلى منتصف القرن الماضى الخاص بضرورة

اطراد العمليات الرياضية اطرادا لا يتخلف في كل نظريات
 الرياضة، أصبح مبدأ كان لابد لهم من التخلي عنه لكي تسير
 الرياضيات قدما إلى الأمام كما تخلت الهندسة من قبل - وقد رأينا
 هذا - عن مبدأ بقاء المسلمات في الهندسة على حالها عندما أدخل
 الهندسيون تغييرات فيها أدت إلى هندسات أخرى لم تكن متوقعة
 مثل الهندسات غير الأقليدية. ولم يكن جبر المنطق وحده هو الذي
 انحرف من معاني عمليات الجبر المألوف. فلقد نشأت في ذلك العصر
 نظريات جبرية أخرى تختلف عن الجبر المعتاد في عملياتها وقوانينها
 مثل نظرية الأعداد الرباعية Quaternions عند **روان هاملتون**
 والحساب الهندسي Calcul Geometrique عند **جراسمان**، ونظرية
 المجاميع Sets عند **جورج كانتور** وربما غير ذلك .

إن أهم ما يفرق بين جبر المنطق والجبر المعتاد هو ما أسماه
بول، قانون الثنائية Law of Duality الذي يقرر أن هناك ثنائية
 جبرية (ومن ثم جاء الاسم ، كما أسماه أيضا اللوجستيقيون قانون
 التوتولوجيا Tautology أو اللغو أو التكرار غير المقيد) بين الجبر
 العادي وجبر المنطق .

ففي الجبر العادي : $v + v = v^2$

وكذلك $v \times v = v^2$

بينما في جبر المنطق دلت \forall لا على عدد كما الرياضة، وإنما على «فئة» منطقية (Class) كفرقة إطفاء المدينة أو سكان قطر من الأقطار مثلاً، فإن تكرار هذه الفئة مهما كانت صورته أعنى بالجمع أو بالضرب لا يغير شيئاً من الفئة ذاتها، إذ تظل كما هي عليه نفس الفئة، أعنى نفس فريق الإطفاء أو نفس سكان القطر، وعلى هذا يكون في جبر المنطق :

$$\forall + \forall = \forall$$

$$\forall \times \forall = \forall$$

وهكذا يساوى الكل جزأه. وهذا تعديل جوهرى فى قانون التبادل Law of Commutation المعروف فى الجبر المعتاد. وكذلك ينحرف جبر المنطق أيضاً عن قانون التوزيع Law of Distribution المعروف فى الجبر العادى. والتوزيع الذى يجمع بين الجمع والضرب له صيغتان فى جبر المنطق :

$$أ (ب + ج) = أ ب + أ ج \quad (١)$$

$$أ (ب + ج) = (أ + ج) (ب + ج) \quad (٢)$$

والصفة الأخيرة وحدها تميز جبر المنطق ولا تستقيم فى الجبر المعتاد، بحيث يمكن وصف هذا الجبر الجديد بأنه نصف توزيعى بالإضافة إلى أنه توتولوجى (بالنسبة للتبادل) وهاتان الخاصتان

الميزتان لهذا الجبر من خواص اللوجستيقا أو الحساب المنطقى أيا كان .

لا أريد الاستطراد إلى أبعد من هذا في تناول هذا الجبر اكتفاءً بالإشارة إلى خصائصه العامة المميزة له.

ولقد حقق جبريو المنطق فى علمهم هذا، حلم ليبنتز فى رياضة عامة أو أبجدية عامة فيها تتحول الاستنباطات إلى حساب، وقدموا بذلك الأداة الفنية لتحليل النُسق العلمية تحليلًا منطقيًا، أو أن شيئًا علميًا أيضًا مما أفادت منه المدرسة اللوجستيقية كل الفائدة. ولكن الأبحاث فى هذا الجبر قد توقفت فى أوائل هذا القرن بمناسبة ظهور اللوجستيقا على المسرح الفكرى. وفى الواقع كان جبر المنطق جبراً أكثر من مطلق فى الكثير من جوانبه، فى طريقة حل مسائله، وفى احتمال تفسير نتائج تفسيراً مزيجاً، أعنى إما عددياً وإما منطقياً. هذا بالإضافة أيضاً إلى احتمال التفسير المنطقى نفسه لتفسيرين فى آن واحد، أحدهما تفسير بالفئات (Classes) والآخر بالقضايا Propositions وهناك فارق كبير بينهما طبعاً.

ومن ثم يمكن القول بأن جبر المنطق لم يكن منطقاً إلا بالعرض. أى بإلزامه تفسيراً منطقياً ليس الوحيد له، وهذا النقص الذريع راجع إلى عدم تكشفه عن «الثوابت» المنطقية الهامة التى بدونها لا

يتأكد المعنى المنطقي «كالتضمن» مثلاً.

أما الكشف عن أهم الثوابت المنطقية الضرورية لاستكمال منطق رياضي فيرجع إلى مؤلفين اثنين، أحدهما **بيانو** Peano في إيطاليا وآخرهما **جوتلوب فريجه** Gottlob Frege في ألمانيا .

أما **بيانو** فكان أستاذا لعلم التحليل في جامعة تورينو واهتم بحركة أسس الرياضة وساهم هو وتلاميذه في تأسيس مسلمات الهندسات كما ساهم في أكسيوماتيك العدد. وفيما يختص بدوره في جبر المنطق كان كتابه Formulaire de Mathematiques (١٩٠٤-١٩٠٨) أكثر تقدما من حيث دقة رموزه كما تكشف عن ثوابت لم يعرفها جبر المنطق وأهم من هذا كله أدخل «المتغيرات» Variables في كل صيغ المنطق، بحيث أصبح المنطق قادرا تماما على التعبير عن قضايا الرياضة كلها برموزه وحدها .

أما **فريجه** فهو منطقي ألماني وفي كتبه المتلاحقة عن رموز المنطق وعن أسس الحساب التي امتد صدورها من ١٨٧٩ حتى سنة ١٩٠٣، تفرغ لمسألة أسس الرياضة التي تركها مذهب تحسبب الرياضة عند الأعداد الصحيحة. ورأى أنه يمكن - استنادا إلى تعريف للعدد شاع عند رياضيين من أمثال **ديكند** و**كانتور** - أن يرد هذا التعريف إلى «ثوابت» المنطق الصوري وحدها بحيث يمكن

استنباط الأعداد. ومن ورائها الرياضيات كلها كما رتبها المذهب الحسابى من مبادئ المنطق الصورى وحده. فكان فريجه بهذا هو الأب الحقيقى لجانب محدد من المذهب اللوجستيقى هو جانب اشتقاق الرياضيات من المنطق. وكانت باكورة مؤلفاته عام ١٨٧٩ تكوين هذا المنطق الرمزى. ثم تابع عمله فى مؤلفاته الأخرى عن أسس الحساب بأن اشتق الأعداد من المنطق.

إلا أنه لم يكن رياضيا كبيانو مثلا، ففشل حيث نجح بيانو من حيث أن رموزه التى اقترحها للمنطق رغم دقتها البالغة كانت غير رياضية بالمرّة ولا طيعة الاستعمال، فوق أنها ثقيلة للغاية لأنها تمتد على غير المألوف طولا وعرضا مما جعل مؤلفاته بمنأى عن القراء ولم يفد منها لاحق .

هذان التياران، تيار جبر المنطق بالرموز الطيعة مع إدخال المتغيرات مما تمتاز به أعمال بيانو، ثم تيار رد الأعداد التى انتهى إليها المذهب الحسابى كسند أخير للرياضة إلى ثوابت المنطق وحده عند فريجه. هذان التياران التقيا عند برتراند راسل صاحب النظرية اللوجستيقية فى أسس الرياضة التى نحن بصددّها. ولقد أفاد راسل كل الإفادة من رموز بيانو وأضاف فى التحليل المنطقى رموزا أخرى مهمة جدا، فى حين أنه كان يجهل تماما أعمال فريجه فى اشتقاق

الأعداد من حدود المنطق وتصوراته. ولكن شيئاً ما في الجو الفكري
أنّذ أملى عليه نفس الفكرة التي بعثت **فريجه** إلى محاولتها. فحاول
راسل نفس المحاولة في اشتقاق الأعداد من المنطق بقوة ووضوح
نادرين وغير مسبوقين. وتناول هذا الموضوع مباشرة في كتابه الأول
Principles of Mathematics الصادر عام ١٩٠٣ ثم مرة ثانية في
كتابه بالاشتراك مع **هويتهد** Principia Mathematica الصادر في
١٩١١ / ٩١٣، والفارق بين الكتابين هو أن الأول موجه إلى الفلاسفة
وحيثهم ومن ثم فهو مكتوب بلغة الكلام. أما الثاني فموجه إلي
الرياضيين المهتمين بمشكلة أسس الرياضيات ومن ثم فهو مكتوب كله
بالرموز.

هناك مرحلتان لفهم المذهب اللوجستيقي، الأولى مرحلة فهم
أصول هذه النظرية المنطقية بالقدر الذي يسمح بمتابعة فهم موضوع
فلسفة الرياضيات والثانية مباشرة اشتقاق الرياضيات من هذا المنطق...
ونبدأ فوراً بالمرحلة الأولى

(٢٤)

نريد أن نلم سريعاً بهيكل المنطق الرمزي أو علي الأصح بأول
حساب فيه المسمى «حساب القضايا الأولية» الذي يستند إليه

اللوغستيقي. وطبعاً نلجأ هنا إلى هذا المنطق في صورته التي أصبحت كلاسيكية تماماً بالنسبة إلى كل الأبحاث اللاحقة. أعنى نلجأ إلى واضعه برتراند راسل، بادئين بنقطة هامة من كتابه الأولى (١٩٠٣).

فمنذ الصفحة الثالثة من هذا الكتاب يعرض راسل لتصوره الصوري أو المنطقي للرياضة، فيخرج بذلك عن المؤلف عند الفلاسفة منذ كانط الذي يرد الرياضة إلى ما في تركيبنا الذهني (أو الحسي بالذات) من حدوس للمكان والزمان تسمح بتركيب الأشكال وإنشاء الأعمال التي تبرر الأحكام التركيبية القبلية للرياضة، فيبين راسل أنه لا حاجة بنا إلى القول بمثل هذا التركيب الذهني عند بحثنا في طبيعة الرياضة وأسسها ويدعو إلى إسقاطه من الاعتبار. ويؤيده في ذلك أن تقدم الرياضة منذ حركة النقد الباطني فيها إنما كان على حساب استبعاد كل حدس كما رأينا .

فيقول راسل في تعريفه لتصوره المنطقي لقضايا الرياضة : «إن الرياضيات الخالصة أشبه بالقضايا التي صورتها دائماً من نوع ل تتضمن م حيث ل و م قضيتان تشتملان على متغير يبقى بعينه في القضيتين، وحيث لا تشتمل القضيتان على ثوابت، غير ثوابت المنطق».

ويجب ألا يفزعنا هذا التعريف فهو يريد أن يقول إن قضايا

الرياضة الخالصة أشبه بالقضايا الشرطية (وهذا معنى التضمن) التي لا تؤكد شيئا في عالمنا الخارجى كما هو الشأن فى قضايا الرياضة التطبيقية المعبرة مثلا عن حرارات وسرعات..إلخ، وإنما تقول تلك القضايا الشرطية بكل بساطة «إذا» أخذت بالمقدم «فيلزم» عنه التالى، أعنى أنها كلها قضايا افتراضية يتضمن فيها الشرط جوابه دون أدنى أكثرث للوجود الخارجى.

هذا وإذا حللنا تلك القضايا الشرطية فلن نجد فيها غير ثوابت منطقية Logical Constants ومتغيرات (Variables) أعنى لن نجد غير صور منطقية صرفة لا تقول لنا شيئا آخر غير المنطق .

إذا فهمنا هذا التعريف أمكننا أن نفهم بسهولة تعريفا آخر عجيبا للرياضة الخالصة يقول فيه راسل : «الرياضة الخالصة هى العلم الذى لا نعرف فيه قط عم تتحدث ولا إذا كان ما نقوله فيها صادقا» فنحن لا نعرف عم نتحدث لأننا لا نجد فيها غير المتغيرات والثوابت المنطقية دون أدنى مادة أخرى سواء فى الخارج أم مادة حدسية فى الذهن، ثم نحن لا نعرف إذا كان ما نقوله صادقا لأن صدق القضايا المستنبطة يتوقف على صدق الفرض أو الشرط وصدق الشرط يتوقف بدوره على القيم المعينة التى تعوض عن المتغيرات فيه. ولما لم يحدث ذلك التعويض فنحن لا نعلم إذا كان ما

نقوله فى الرياضه صادقاً.

بعد الفراغ من هذين التعريفين اللذين يباعدان بين تصور راسل المنطقى للرياضه وتصور الحدسيين أتباع كانط من الرياضيين الذين أصرّوا على قيام الرياضه على نوع من التجربة الذهنيه تسمى «الحدس الرياضى» (حدس الأشكال المكانية والأعداد)، نركز الكلام فقط على «الصور المنطقية» التى تسمى أيضاً «ثوابت» المنطق.

والصور المنطقية للقضايا والعلاقات المنطقية بينها والتى بواسطتها يتدرج الاستنباط من قضية إلى أخرى هى كل موضوع المنطق .

والصورة المنطقية لأية قضية هى الصورة التى تشترك ومثيلاتها فيها. وهناك بالطبع صور منطقية عديدة للقضايا. فليست صورة القضية «سقراط فيلسوف أو رياضى» كصورة القضية «سقراط عاش قبل أرسطو»، فالأولى «قضية منفصلة» كما يقول المناطقة والثانية تعبر عن «علاقة» بين طرفين هى علاقة «عاش قبل» وكلتاهما قضية تختلف عن الأخرى. إن حصر هذه الصور المنطقية للقضايا من أهم ما يميز المنطق الرياضى المعاصر.

أما العلاقات بين القضايا فهى الشروط أو القواعد التى بمقتضاها تستنبط من صدق القضية ل مثلاً صدق قضية أخرى، أو

قضايا مثل ل ١٠، ل ٢٠، ل ٣٠... ففي منطق القياس التقليدي الذي يقوم على ألفاظ اللغة تنحصر تلك الشروط في قيام حد أوسط يشارك الطرفين في معناه (ولا استحالة القياس) وفي مراعاة الكم والكيف والسلب والإيجاب. أما في المنطق الرياضي وفي أبسط حساب فيه ونقطة بدايته أيضا المسمى حساب القضايا أو حساب القضايا الأولية (Elementary Calculus of Propositions) فلا نظر في حدود القضايا وبالتالي لا بحث عن حد أوسط يشترك الطرفان في معناه فكل هذه الحواجز اللغوية تسقط من الاعتبار. وإنما تؤخذ القضايا جميعا كوحدة كل وحدة منها غير منقسمة من داخلها أو محللة إلى حدود (كالמושوع والمحمول) كما لا ننظر إلى المعنى القاموسى كذلك، ثم يرمز إلى كل وحدة بحرف مثل الحرف ل أو م أو ن مهما كان طول القضية ومهما اختلفت القضايا فيما بينها في معانيها القاموسية، فيحاول ذلك الحساب فقط بأن يحدد علاقات تلازم بين قيم «الصدق والكذب» التي تنسب إلى تلك الوحدات أو القضايا. مثلا النظرية الخامسة في هندسة أقليدس تلزم عن الرابعة، فإذا كانت الرابعة صادقة (الشرط) فيلزم صدق الخامسة (المشروط). وعلى عكس ذلك إذا كانت الخامسة كاذبة (المشروط) فيلزم كذب الرابعة (الشرط). وإنه فهناك استنباط أو علاقة استنباطية بين

قضيتين ليس بينهما اشتراك فى المعنى اللغوى لأن كل نظرية تتحدث عن شىء مختلف، وإنما فقط على أساس قيمتى الصدق والكذب اللتين يمكن نسبتهما إلى كل منهما.

القضايا - أو صورها - التى تعالج فى حساب القضايا الأولية هذا، محدودة العدد. والعلاقات الاستنباطية بينها تتوقف على ما لها من قيمتين هما الصدق والكذب. أما رموزها التى اصطلح عليها راسل والتى أصبحت اصطلاحاً دولياً وتقليدياً فى كل المؤلفات فهى كما يأتى :

(١) الحروف اللاتينية ابتداء من حرف /٠ يدل كل واحد منها على قضية موجبة. ونحن نصلح بديلاً عربياً لها الحروف ابتداء من حرف ل . وعلى ذلك فإن ل بمفردها تدل على قضية موجبة وتقرأ « ل صادقة » .

(٢) فإذا أدخلنا على ل علامة - للنفي، دلت - ل على قضية سالبة وتقرأ « ل كاذبة » .

(٣) وإذا أدخلنا بين قضيتين ل. م العلامة ٧ دلت القضية ل ٧ م على قضية منفصلة (الجمع المنطقى).

(٤) فإذا أدخلنا بين قضيتين العلامة c ، دلت ل c م على أن الأولى تتضمن الثانية، بمعنى أن صدق الثانية يلزم عن صدق

الأولى.

(٥) وإذا أدخلنا بين قضيتين العلامة . دلت لم على أن القضيتين يتساويان صدقا أو كذبا .

ولما كان يجب ألا نقبل في المنطق الرياضى حداً جديداً إلا إذا أمكن رده إلى حدود سبقت معرفتها فيه، وألا نقبل في قضية إلا إذا ارتدت بالبرهان إلى مسلمات أو قضايا سبق برهانها، أعنى لما كان هذا المنطق يجب أن يتكون في صورة نسق استنباطى بالمعنى الذى سبق أن شرحناه، وذلك لكى نطمئن إلى سلامة خطوات اشتقاق الرياضة منه، فإن واسل اختار فى كتابه بالاشتراك مع هويتهد حدين أوليين اثنين من تلك الصور السابقة، هما النفى والفصل ليعرّف بالاشتقاق على أساسهما الحدود الباقية، كما اختار خمس مسلمات (أو قوانين من المنطق) تسمح بأن نشق منها بالبرهان كل القوانين المنطقية الأخرى .

فإذا وضعنا أمامنا النفى والفصل كحدين أوليين، فسنحصل على التعريفات الآتية للعلامات المشتقة منها للتضمن والفصل والمساواة :

- تعريف التضمن $c = -l$

- تعريف الوصل $l = -(-l)$

- تعريف المساواة $l = m = (l \cdot c) \cdot (m \cdot c)$

أما المسلمات التي قبلها للنظرية المنطقية فهي :

- (١) $(\text{م} \vee \text{ل}) \text{ع}$
- (٢) $\text{م} \text{ع} (\text{م} \vee \text{ل})$
- (٣) $(\text{م} \vee \text{ل}) \text{ع} (\text{م} \vee \text{ل})$
- (٤) $(\text{م} \vee (\text{م} \vee \text{ن})) \text{ع} (\text{م} \vee (\text{ل} \vee \text{ن}))$
- (٥) $(\text{م} \text{ع} \text{ن}) \text{ع} ((\text{م} \vee \text{ل}) \text{ع} (\text{ل} \vee \text{ن}))$

وعلى أساس هذه المسلمات الخمس يبرهن راسل كل القضايا المنطقية التي تستعمل الحدود السالفة الذكر فإذا تم البرهان اعتبر القضية المبرهنة قانونا (أو كما يقول توتولوجيا) من قوانين المنطق. وقد أربت تلك القوانين المبرهنة على أكثر من خمسمائة قانون للمنطق لا يمثل القياس التقليدي منها غير قانونين اثنين من ذلك العدد الضخم، وهكذا اتسع المنطق الرياضى لعدد ضخم من قوانين الاستنباط المنطقي التي حصرها المنطق التقليدي في ضروب وأشكال القياس الضيقة، فأصبح بذلك المنطق قادرا على استيعاب الاستنباطات الرياضية المعقدة الكثيرة .

بعد أن أوجزنا أهم العناصر التي يستند إليها حساب القضايا الأولية، يبقى بيان كيفية إجراء الحساب أو الاستنباط. وغرض الحساب هو إثبات أن صيغة ما من المنطق، هي قانون (أى

توتولوجيا) فيه بمعنى، أنها صيغة دائماً صادقة مهما عوضنا من قيم محددة بدلا عن المتغيرات فيها. وبرهان كل قضية منطقية على هذا النحو ابتداء من المسلمات أو مما سبق أن اشتق منها بالبرهان ضمان لعدم الاستناد إلى بداهة أو حدس حسي أو أية مغالطة أخرى، وهو أمر ضروري لهذه النظرية المنطقية التي تحتاج إلى الحذر الشديد من قبول عناصر غير منطقية في الوقت الذي أخذت فيه على عاتقها اشتقاق الرياضيات منها وإثبات أنها منطق وحسب .

وفى كل فرع من فروع الرياضيات توجد قواعد عملية لاشتقاق النظريات من المسلمات. وفى حساب القضايا الأولية الذى نحن بصدده هناك قاعدتان :

القاعدة الأولى: قاعدة التعويض، وهي قاعدة تقول إنه يمكن فى أية صيغة من المنطق أن يعوض عن رمز فيها مثل L حيثما وجد بصيغة أخرى تعادله صدقا أو كذبا مثلا فى الصيغة $L - 7$ (وتقرأ L أما صادقة وأما كاذبة) يمكن التعويض عن L بالصيغة نفسها على الوجه الآتي :

$$(L - 7) - 7 \quad (L - 7 - 7)$$

القاعدة الثانية : قاعدة الاستنتاج وهى قاعدة مستعملة فى العلوم الرمزية، وإن لم يكن مصرحا بها ومؤداها أنك إذا علمت أن A وكذلك

أ c ب من قوانين المنطق. فإنك تستطيع أن تستنتج ثبوت ب بمفردها كقانون أيضا ويمكن وضع هذه القاعدة في الصورة الرمزية الآتية :

$$\frac{\begin{matrix} \text{أ} \\ \text{أ c ب} \end{matrix}}{\text{ب}}$$

وهذه القاعدة كما يدل مؤداها هي التي تسمح بالانتقال أو التدرج من المقدمات إلى نتائجها .

إن هذا الموجز لخطوات حساب القضايا يمكن الآن فقط أن يتوج بمثال للبرهان على أن الصيغة الآتية مثلا هي قانون أو توتولوجيا منطقية :

$$((\text{ل c ن}) \text{ c } (\text{م c ن})) \text{ c } (\text{م c ل})$$

وخطوات البرهان على هذه القضية عند راسل كما يأتي :

$$(\text{ل - ل}) \text{ c } (\text{ل - ل}) = (\text{ل c ل}) \quad \text{وفقا لتعريف التضمن}$$

يعوض - ل بدلا من ل وكذلك - م بدلا من م في المسلمة الرابعة مع التعويض عن التضمن بتعريفه نحصل على الصيغة الآتية :

$$((\text{ل - ل}) \text{ c } (\text{ل - ل})) \text{ c } ((\text{م - م}) \text{ c } (\text{ل - ل}))$$

وبتطبيق تعريف التضمن نفسه على هذه الصيغة نحصل على :

(١).....((ل ع ن) ع م ع) ل ع ن)

ثم بتعويض - ل بدلا من ل فى المسلمة الخامسة، وباستعمال التعريف بدلا من علامة التضمن نحصل بنفس الطريقة على الصيغة الآتية :

(٢) ((ل ع ن) ع م ع) ل ع ن)

ثم بتعويض م ع ن بدلا عن ل، ثم ل ع م بدلا عن م . ثم ل ع ن بدلا عن ن فى الصيغة (١) نحصل على :

((م ع ن) ع (ل ع م) ع (ل ع ن))

(٣) ((ل ع م) ع (م ع ن) ع (ل ع ن))

وهى صيغة من النوع أ ع ب حيث أ هو الصيغة (٢) التى بينا أنها توتولوجيا، فالقاعدة الثانية وهى مبدأ الاستنتاج يسمح باستنتاج أن الصيغة (٢) وهى :

((ل ع م) ع (م ع ن) ع (ل ع ن))

هى أيضا توتولوجيا وهو المطلوب برهانه. وهكذا يبرهن راسل على أكثر من خمسمائة قضية أو قانون منطقى فى هذا الحساب. لقد أغفلنا هنا ما كان يمكن أن يقال من تحسينات لاحقة فى هذا الحساب ومن تعليقات نقدية واكتفينا بما هو ضرورى لفهمه. وليس هو الحساب الوحيد، إذ يأتى بعده حساب الدوال القضائية التى ترد

إليها دوال الرياضة، وفي هذا الحساب تحلل القضية إلى موضوع ومحمول، ثم يأتى بعد ذلك حساب الفئات Calculus of Classes ثم حساب العلاقات Calculus relations وكلاهما يتصلان فيما بينهما، كما يتصلان معا باشتقاق قضايا العدد. وهنا فى هذه المرحلة لا نعرف - على حد تعبير راسل - متى انتهى المنطق ومتى بدأت الرياضة. ولقد اكتفينا بحساب القضايا الأولية لأنه كالقاعدة التى يبنى عليها البناء المنطقى كله باعتباره نسقا استنباطيا.

(٢٥)

لنتنقل الآن إلى جوهر النظرية اللوجستيقية التى ترجع إلى جوتلوب فريجه فى القرن الماضى وإلى بوتراند راسل فى القرن العشرين وأعنى بذلك اشتقاق الرياضة (أو بالأحرى اشتقاق «الأعداد» التى ارتدت إليها الرياضة كلها فى المذهب الحسابى) من المنطق الصورى وحده .

ولما كان هذا البحث موجها إلى الفلاسفة دون الرياضيين، فإننا سنتحاشى كل تعقيدات فنية فى استعراضنا لراسل، فلا نلجأ إلى الصيغ الرمزية إلا فى أضيق نطاق ونكتفى بشرح مقاصد النظرية مع التعليق عليها بتمهيدات ومقارنات وتوضيحات تقربها .

نحن نعلم أن راسل عرّف الرياضة الخالصة بأنها «فئة تلك القضايا التي صورتها ل تتضمن م حيث ل ، م قضيتان تشتملان على متغير يبقى هو هو بعينه في القضيتين وحيث لا تشتمل على ثوابت غير ثوابت المنطق».

ونقول الآن إن مثل هذا التعريف يبرز الخصائص الآتية :
الرياضة «صورية» و«قَبْلِيَّة» و«استنباطية» مما يؤكد كون موضوعات الرياضة ليست بالضرورة كميات تتعلق بالمكان والحركة والزمان، وما استبعاد الكم على هذا النحو إلا النتيجة الحتمية للتطور الذي وصفناه للرياضة نفسها عند أصحابها في غضون القرن الماضي من «تحسب» للرياضة استبعد الحدس في كل صوره وخاصة المكانية.
ثم من امتداد لفكرة العدد لتشمل اللامتناهى (كانتور) وأيضاً من أكسيوماتيك للعدد أحاله إلى قضايا منطقية (بيانو) وأخيراً من نقائض رياضية احتاجت إلى حلول منطقية .

هذه التطورات المتلاحقة في اتجاه نحو المنطق بالذات هو الذي هياً تماماً إلى التحام الرياضة بالمنطق والتوحيد بينهما في نسق موحد عند راسل. وفي نطاق هذا النسق الموحد إذا شئنا إن نعرف كلا منهما على حدة، فلا نجد إلا عبارة راسل الأخرى التي تقول :
«إنهما لا يختلفان إلا كما يختلف الصبي عن الرجل» فالمنطق هو

صبا الرياضة والرياضة رجولة المنطق». ذلك لأن النسق الموحد يبدأ بحساب القضايا الأولية ثم يتدرج منه إلى حساب القضايا العملية وعندما ينتقل إلى حساب الفئات وحساب العلاقات يتدرج دون أدنى فجوة أو قطع إلى تناول الحساب العددي منتقلا منه إلى بقية فروع الرياضة كما نسقها المذهب الحسابى الذى له الفضل الأول فى إمكان تسلسل الرياضة كلها إبتداء من العدد الصحيح، وإذن فنحن هنا لا نستطيع أن نقول أين انتهى المنطق وأين ابتدأت الرياضة؟ .

إن السؤال الأول والهام الذى نبدأ منه فهم هذه النظرية هو، هل التعريف الذى بدأنا منه بالرياضة صادق؟ هل يمكن تعريف الموضوعات الرياضية كلها بواسطة ثوابت المنطق واشتقاق قضايا الرياضة من قوانين المنطق وحده؟

هذا السؤال الهام - بفضل النتيجة التى وصل إليها المذهب الحسابى فى رد الرياضة إلى العدد الصحيح - يمكن أن يُردَّ عند اللوجستيين إلى سؤال أبسط منه وهو : هل يمكن رد الحساب إلى المنطق، أى تعريف الأعداد بواسطة ثوابت المنطق؟ هذا تبسيط كبير للسؤال الأول يسره ووطئه المذهب الحسابى نفسه. فلنبداً إذن من الأعداد ولكن أى أعداد؟

إن سلسلة الأعداد الطبيعية التى يعتبرها الرياضيون أساس

البناء الرياضى كله، هى تلك العملية التى لا تنتهى لمتابعة أعداد صحيحة منتهية تبدأ بالصفر ثم بالواحد الخ... إن الصفر لم يكن عددا حتى اكتشفه **الخوارزمى** . والقدماء لم يعتبروا الواحد عددا، **فأقلاطون** يبدأ العدد من ٢ وكذلك **أرسطو**، لأنه يوحد بين الموجود والواحد، فيقول إن الواحد مساوق للموجود، أو اسم آخر له يمكن أن يتبادل معه فهو ليس عددا. وبعض المحدثين ينكرون أيضا كون الصفر عددا. ولكن ليس هناك أدنى صعوبة الآن فى أن نعتبر مع اللوجستيين أن سلسلة الأعداد تبدأ بالصفر ثم تتدرج إلى الواحد الخ..

من جهة أخرى كل واحد من تلك الأعداد البادئة من الصفر يمكن أن نعتبره إما معبرا عن عدد الأشياء وأما معبرا عن ترتيب الأشياء أو درجتها فى داخل سلسلة. والاعتبار الأول هو الأهم والأولى، لأن ترتيب الأعداد أو مكانتها داخل سلسلة ما إنما هو عملية تالية لإدراكنا الأعداد كلها على حدة. إذ يجيء بعد ذلك ترتيبها حسب الأكبر والأصغر والمساوى. وإذن فالأعداد المسماة المرتبة (Ordinal) إنما تأتى بعد الأعداد المسماة الأساسية أو العادة (Cardinal) ومن ثم يتحول السؤال السابق المبسط عند اللوجستيين إلى سؤال آخر محدد هو : هل يُرد العدد العاد إلى المنطق ؟

لنرجع الآن إلى تلك الفترة التى نشأ فيها هذا السؤال عند فريجه فى العقدين الأخيرين من القرن الماضى.

فى ذلك الوقت كان يرى بعض الرياضيين أن التساؤل عما هو العدد الذى انتهى إليه المذهب الحسابى تساؤل غير مقبول، لأن العدد واضح وحدى وربما لا سبيل إلا إلى القول بأنه هبة من الله (كرونكر).

رياضيون آخرون قالوا إن الأعداد مجرد رموز أو علامات (Signs) وهى إما علامات لإجراء عمليات حسابية فتسجل الأعداد نتائج العمليات (هاينكل Haenke) وإما علامات لا معنى لها إطلاقاً ولا تزيد على مجرد كونها علامات وحسب (الاسميون).

آخرون قالوا إنها موضوعات سيكولوجية، أى معبرة عن عملية تجريد سيكولوجى من مواقف تجريبية بحتة فتكون الأعداد منتزعة مباشرة من تجاربنا.

أما فريجه وهو أول اللوجستيين فيقول إنها موضوعات منطقية صرفة.

فيما يختص بالنظرة الأولى القائلة بأن الأعداد واضحة إلى حد أنه لا يجب إثارة سؤال عن طبيعتها فهى نظرة يرفضها الواقع التاريخى القريب للرياضة حيث أن الرياضيين رأوا ضرورة متابعة

تحليل فكرة العدد (عند الأكسيوماتيكيين مثلا) إلى مسلمات تنتجها.

أما فيما يختص بالاسمييين Nominalistes الذى اعتبروا الأعداد مجرد علامات أو ترقيمات. نقول إنهم بذلك يتكلمون عن أشياء لها خصائص هى قطعا غير خصائص الأعداد. فالعلامات المبصرة من حيث هى كذلك هى من عالم الأشياء الطبيعية والكيميائية. فهى ترسم على أنحاء مختلفة باختلاف اللغات. وتكتب وتمحى وترفع وتوضع وتجمع وتفرق إلى آخر ما هنالك خضوعا لقوانين الطبيعة والكيمياء مما يخلو قطعا من الخصائص المميزة للأعداد ذاتها، كخاصية كون العدد دائما هو هو رغم اختلاف علاماته. وكخاصية كونه فى ذاته علاقة ثابتة بالنسبة لما قبله ولما بعده، بينما العلامة لا تتضمن تلك العلاقة. وكخاصية ثبات هويته عند دخوله على أنحاء لا تنتهى فى التركيبات العددية. وإذن فرغم أن اختيار علامات الأعداد هام فى الرياضة، إلا أنه يجب ألا نخلط بين العدد وهو معنى وبين كتابته أو علامته المادية.

كذلك يجب ألا نخلط بين ذلك المعنى الذى ميزناه وبين الأفكار السيكلولوجية التى تثار فى ذهن الفرد عند مشاهدته للأشياء المتجمعة فى فئات أو عند رؤيته بالعين العلامات العددية المكتوبة. إن تلك الأفكار السيكلولوجية حالات ذاتية وتختلف من فرد إلى آخر ومن

لحظة إلى أخرى، ومن ثم فليست الأعداد ظواهر نفسية وكيفيات سيكولوجية نظرا لما فيها من دقة وموضوعية .

وإذن فلم يبق إلا أن ننسب الأعداد إلى نوع رابع من الأمور غير ما تقدم ذكره أعنى إلى «الصور المنطقية» وهذا بالضبط هو ما أبرزه في آن واحد تصور العدد عند **جورج كانتور**، وتعريفه عند فريجه ثم عند راسل، إذ يكاد يتفق الثلاثة على تعريف واحد للعدد .

إن فريجه المنطقي الذي عاصر **كانتور** الرياضى ولم يطلع عليه، كان على علم بتمييز تقليدى فى المنطق بين المفهومات أو المقصودات الأوائل وبين المفهومات أو المقصودات الثانوى : مثلا عندما أتصور إنسانا أو مثلثا أو حركة فهذه التصورات مفهومات أوائل أى معبرة أو دالة على تلك الأشياء التي يتصورها الفهم بداءة. ولكن إذا قلت عن تلك المفهومات إنها أجناس أو أنواع أو كلييات أو جزئيات أو تصورات أو قضايا فهذه أوصاف لاحقة للمقصودات الأوائل ومن درجة ثانية بالنسبة إلى الأشياء وليست معبرة أو دالة عليها. هذه هى المقصودات الثانوى التى هى موضوع المنطق بالذات .

وكذلك الشأن فى العدد عند **فريجه**، فالأشياء متفرقة ومجمعة لها معانيها الأوائل المباشرة. فمثلا هذا إنسان وتلك شجرة الخ.. ولكنها فى انفرادها وفى تجمعها لها صفات أخرى غير مفهوماتها الأوائل

وتلتزم عن نظرنا فى صفة ما مشتركة من صفات مفهوماتها . تلك مفهومات أخرى غير مفهوماتها الأوائل نلتفت إليها بعقلنا ونصل إليها بعملية تجريد عقلى وتلك هى أعدادها . فالأعداد ليست تصورات مباشرة أو أوائل وإنما هى تصورات من درجة ثانية عن تصورات مباشرة ، هى التقات أو تجريد لصفات مشتركة بين تصورات أوائل ، إذ يجب أن تكون هناك أولا تصورات الأشياء المنفردة والمجموعة فى فئات لكى تكون هناك بعد ذلك تصورات عددية للفئات .

إنه ابتداء من وجهة نظر كهذه توصل أيضا جورج كانتور فى نظريته فى «المجاميع» إلى فهمه للعدد كأسس أو قوى (Powers, Puissance) فحسب بالنسبة لتصورات الأشياء . أعنى كتصورات كلية تكونت بالتجريد العقلى لصفة ما عندما تجتمع الأشياء فى فئات أو مجموعات . وبالطبع مجموعات كثيرة مختلفة يمكن أن تؤدى بمثل هذا التجريد إلى نفس التصور الكلى أى نفس العدد عندما «تتساوى» المجموعات فيما بينها ، أى عندما نلتفت إلى صفة مشتركة ومتماثلة كالمساواة القائمة بين مختلف تصورات الفئات المعروضة علينا . هذا هو تصور جورج كانتور للعدد حيث نلاحظ أن تصويره للعدد كأسس أو قوى ، هو عين تصور جوتلوب فريجه للعدد كمقصور ثان ، أى كتصويت مجرد عن تصور أول .

بهذه المناسبة وقبل أن ننتقل إلى راسل، نتوقف قليلا عندما يسمى التعريف بالتجريد Definition by Abstraction الذى يكمن وراء تلك الآراء، ويؤدى إلى هذا التصور للعدد كمقصود ثان أو كأسس وقوى. فهناك من أنواع التعريف الممارسة في العلم والرياضة ما يسمى بهذا الاسم، ويمقتضاه نعرف الأشياء مهما اختلفت وتضاربت بواسطة صفة مشتركة بينها نلتفت إليها ونعزلها عزلا عقليا لأغراض العلم، فقد يختلف جسمان في حجمهما وشكلهما ومادتهما ولكنهما «يتساويان» وزناً فيعزل صفة المساواة أو بتجريدنا نقول إننا نعرفهما بالتجريد. مثال آخر للتعريف بالتجريد ما قبله **أقليدس** فى مسلمته الخامسة، فقولك الخط α يوازى الخط β إنما معناه إننا حددنا أو عرفنا الخطين بأن انتزعنا معنى جديدا مشتركا هو أن اتجاه α يساوى اتجاه β . وبذلك تكون مسلمة **أقليدس** تعريفا بالتجريد.

إن التعريف بالتجريد متصل بتحليل «العلاقة» Relation ويتعريف العدد عند راسل. فهو يسمى «علاقة متعدية» Transitive Relation تلك العلاقة التى إذا فرضنا قيامها بين α . β . γ فإنها تقوم كذلك بين α . γ ، ومثل هذه العلاقة أعم من علاقة «المساواة» Equality وتشملها. مثلا علاقات $\alpha\beta$ أو $\beta\alpha$ أو «أكبر من» كلها

علاقات متعددة، ولكنها ليست كالمساواة قابلة للانعكاس أو للرجوع على الأعقاب. مثلاً إذا كان $A \neq B$ فإن $B \neq A$ وليس $A = B$. بينما المساواة قابلة للعودة أو الانعكاس فهي علاقة سيمتيرية أو متسقة Symetrical كما يصطلح راسل. إذن المساواة هي في أن واحد علاقة متعددة وسيمتيرية. إن العلاقة التي تجمع في أن واحد التعدى والسيمتيرية يسميها راسل التماثل أو التشابه Similitude. ولهذا اللفظ الذي يظهر في حساب العلاقات أهمية خاصة في تعريف راسل للعدد بما لا يخرج جملة عن تصور فريجه وكانتور. ونحن نثبت فيما يلي تفكير راسل برموزه بين قوسين كبيرين لأنها مسألة فنية بحثة يمكن للقارئ إغفالها.

(إذا فهمنا هذه الإشارات السريعة ثم وضعنا نصب أعينا الرموز الآتية التي يستعملها راسل في تعريفه للعدد وهي :

NC الأعداد العادة

Nc العدد العاد

CI فئة

Sim تماثل - مشابهة

D هو هو بعينه

فإننا نقول إن راسل الذي تأثر بكانتور يرى مثلاً أن العدد «ثلاثة»

هو فئة Ci ولكنه ليس فئة لأشياء. أى ليس منتزعا مباشرة من الأشياء بحيث يكون المقصود الأول منها، وإنما هو فئة لفئات كثيرة متشابهة Sim فيما بينها بالثلاثية. بعبارة أخرى نعرف العدد ثلاثة بالتجريد لفئة مشتركة أو متماثلة بين فئات كثيرة وهذه الفئة المتماثلة هي علاقة متعددة سيمترية. إذن العدد ثلاثة هو فئة كل الفئات المماثلة لـ a مثل الفئة B فيكتب بالرمز

$$Ne 'a' = B (\hat{B} sma)$$

يجيء من هذا التعريف الآتى لأى عدد منفرد (ونحن نذكر رقم القضية فى كتابه بالاشتراك مع هويتهد) .

$$100.01 \quad Nc \quad \xrightarrow{sm} \quad Df.$$

الذى يقول إن أى عدد عاد هو بالتعريف فئة الفئات المتماثلة

(Cardinal number is a class of Classes Similar to one Another)

ثم يجيء التعريف الآتى للعدد العاد جملة

$$100.02 \quad NC = D' Nc \quad Df.$$

وفئة العدد العاد جملة هي فئة لجميع الأعداد العادة المنفردة

ولذلك نقرأ التعريف كما يأتى :

فئة الأعداد العادة NC إنما هي فئة لفئات (D) كل الفئات

المتماثلة Nc .

(The Class of Cardinal numbers is the Class of the Classes which are Similar to one another).

إذن هناك أولا فئات الأشياء، ثم هناك فئات أو أعداد منفردة لتلك الفئات الأولى، ثم أخيرا هناك فئة عامة لكل تلك الأعداد وهي سلسلة العدد العاد.

ثم ينتقل راسل بعد ذلك إلى تعريف الصفر فالواحد ثم الجمع والضرب، فتتكون بذلك سلسلة الأعداد العادة. وفيما يختص بالعديدين المذكورين يعطى راسل التعريفين الآتين بالرموز ونحن نترجمها كما يأتى :

الصفر هو الفئة التى عضوها الوحيد هو فئة الخلو (Null class).

الواحد هو فئة كل الفئات ذات العضو الواحد .

ثم يبرهن راسل على عدد كبير من قضايا الحساب على أساس عمليتي الجمع والضرب المستمدين من مقابلهما فى الحساب المنطقى (الوصل والفصل) ، ثم يتدرج بعد ذلك إلى استنباط كل فروع الرياضة وقضاياها كما وردت مسلسلة فى المذهب الحسابى الذى له الفضل فى تيسير مهمة اللجوستيقيين .

والآن دون أن نسترسل إلى أبعد من هذا فى تقصى موقف راسل فى اشتقاق الرياضة الذى طابعه الأول الدقة الفنية مما يتجاوز حدود

عرضنا هذا، نود أن ننتقل فوراً إلى مناقشة قيمة الموقف اللوجستيقي .

وأول كل شيء ننبه إلى أن التعريفات المتتابة في هذا المذهب لها أهمية كبرى تفوق أهمية اشتقاق النظريات كما يشهد بذلك تعريف العدد أو أى ثابت منطقي آخر عما ذكرنا نموذجاً له. ومن ثم يجب أن نلاحظ ما يأتى على التعريفات .

أنها تبدو في بادئ الأمر ذات قيمة فنية بحثية، لأن وظيفتها إنما هى إدخال رمز مختصر جديد هو «الحد» الذى يراد تعريفه بدلاً من مجموعة مطولة من الرموز التى سبقت معرفتها فى النسق نفسه وهي التعريف .

ولكن فى حقيقة الأمر إذا نظرنا إلى التعريفات من جهة مضموناتها أو معانيها، فإنها تصبح ذات أهمية أبعد خطراً سواء من حيث توكيدها لأهم المعانى أو الأفكار التى يدور حولها النظر فى النسق المنطقي الرياضى الموحد، أم من حيث تحليل تلك المعانى أو الأفكار التى يجمعها الرمز الجديد تحليلاً دقيقاً محدداً لا نحصل عليه فى أى قاموس أو علم آخر وذلك كما تشهد به الرموز المطولة التى تعرف الرمز الجديد وتضع تحليلاً لمعناه .

وإذن - ففلسفياً - التعريفات هنا ذات أهمية كبرى فى حين أن استنباط القضايا أو النظريات الرياضية هو أمر أقل أهمية فلسفياً

بل وفنياً إذ قد ذلل ذلك الأمر وعبّد طريقه من قبل المذهب الحسابي الذي سلسل قضايا الرياضة تسلسلا بديعا ونهائيا .

وحتى إذا كان هناك خطأ ما في استنباط قضية رياضية في نسق راسل فإننا نستطيع أن نطمئن إلى صدق القضية ذاتها استنادا إلى المذهب الحسابي. على كل حال استنباط القضايا أقل أهمية من تعريفات النسق الجديدة التي تعبر بلغة المنطق عن أمور لم تكن في المذهب الحسابي منطقية أو صورية .

هذا ثم إن الاختيار الحر من بين الرموز الكثيرة الواردة في النسق لطائفة محددة محصورة نعرف بها رمزا جديدا (الحد الذي يطلب تعريفه) هو أمر أكثر من مجرد عمل قاموسي إذ هو أعسر عمل في تكوين النسق الاستنباطي من حيث أن ذلك الاختيار إنما يتطلب تبصرا نافذا بموضوعات النسق وفهما دقيقا لأهدافه ولأحسن الطرق المحققة لها .

وهنا أيضا نلاحظ أن كل تعريف جديد من التعريفات المتتابة في داخل النسق إنما هو أمر يحدد بالدقة المرحلة التي وصل إليها النسق في طريقه الطويل نحو هدفه،، كما خير وصف لذلك الطريق الطويل في أية مرحلة من مراحلها إنما هو معرفة التعريف الذي يميز تلك المرحلة بحيث نحسم في كل مسألة تثار إذا كان يمكن أن تجاب إيجابا أم سلبا في حدود مرحلة معينة من التعريفات.

كل هذا الكلام فى إبراز أهمية التعريفات فى النسق الموحد هو تركيز الانتباه فى أهمية تعريف العدد الذى جاء به راسل فى النسق اللوجستيقى والذى سبق ذكره فالمسألة الآن هى هل هذا التعريف للعدد الذى بواسطته انتقل النسق الموحد من المنطق إلى سائر أجزاء الرياضة يقبل التبرير فيصبح منطقيا أو فلسفيا غير قابل للطعن أو الرفض وأنه يطابق الموضوعات المعروفة فى الرياضة باسمه وأنه لا يطابق إلا هذه الموضوعات وحدها؟

فيما يختص بالتعريف الأخير الخاص بالعدد العاد فى عمومهِ (المرقوم برقم 100. 02) من العسير أن يتردد أحد فى قبوله لأنه يؤكد بكل بساطة أن فئة العدد هى فئة جميع فئات الأعداد العادة. أما فيما يختص بالتعريف الأول (المقوم برقم 100. 01) فقد وجهت إليه اعتراضات نناقشها الآن لتبين مدى إمكان تبرير التعريف .

فابدأ أولا بالقول بأن الرياضى **هاوسدورف** (Hausdorff) قال إن تصور فئة لكل الفئات الخ.. هو تصور غير مقبول لأنه يقود إلى تناقض منطقي معروف هو أن مثل هذا التصور يشمل نفسه أو مدلوله كجزء من نفسه إذ أن «فئة» لكل الفئات هى نفسها عدد أيضا. لقد رأينا أن لمثل هذا الاعتراض نظيرا عند راسل على نظرية

جورج كانتور، ولذلك نتركه هنا لمن ينظر في حل نقائص تلك النظرية الرياضية فهناك نجد المحاولات المختلفة لتخطي تلك العقبة.

ثانيا يعترض الرياضى **مولدرب Molderup** فى مقال له فى الحولية الرياضية **Math . Annal** بأن ذلك التعريف متناقض فى ذاته من حيث أنه يجعل العدد ١ هو فئة كل الأشياء فى الوجود. بمعنى أنه يندرج تحته كل شىء من حيث أنه مفرد. ولكن لا أرى فى ذلك أى تناقض، فإن أرسطو كما رأينا جعل الواحد مساوقا للموجود. ويتبادلان (أى الواحد والموجود) بذلك الدلالة على الشىء الموجود ولم يطن أحد بتناقض أرسطو .

ثالثا يعترض الرياضى **فيلشتاين Welstein** فى دائرة معارف الرياضة (١٩٠٩) بأن عدد فئة ما، لا يمكن أن يعتبر فئة كل الفئات المماثلة لفئة ما من حيث أن هذه الفئة الأخيرة غير معروفة لنا. وهنا نلاحظ أنه ليس ضروريا أن نعرف كل أعضاء فئة ما لى نصل إلى تحديد أو تعريف تلك الفئة. وكل ما نحتاج إليه هو أن تكون لدينا وسيلة أو طريقة لنقطع فيما إذا كان موضوع ما هو عضو أم لا لتلك الفئة؟ مثلا فئة الشكل الكثير الأضلاع هى منطقيا فئة يمكن تبريرها تماما من حيث أن تعريف الشكل الكثير الأضلاع يمدنا بوسيلة أو طريقة لنبت فى أية لحظة فيما إذا كان موضوع ما هو كثير أضلاع

أم ليس كذلك. إذن فالاعتراض المذكور يتبدد لأن تعريف العدد يعطينا طريقة للبت فيما إذا كان أمامنا عدد بون أن يعين عددا بالذات من الأعداد الفردية. إذ أن هذه تأتي تعريفاتها بعد ذلك فيما وضحنا ذلك فيا يختص بالصفر والواحد .

هذه اعتراضات وجدناها في طريقنا على تعريف واسل ونتبين من مناقشتها ما يبرر تماما تعريفه للعدد. كما وجدنا أيضا ما يبرر اتجاهه هذا في تعريف العدد من قبله عند كانتور وعند فريجه .

ولقد قصدنا إبراز الأهمية الفلسفية لتعريف العدد بالذات في النسق اللوجستيقي وكذلك التعريفات الأخرى. لأنه إذا كانت هناك أهمية خاصة نعلقها على ما أنجزه هذا النسق من تقدم، فإن هذه الأهمية لا تستمد من اشتقاق النظريات الرياضية بالبرهان، فهذا الاشتقاق كما قلنا كان قد يسره وعبّده المذهب الحسابي من قبل. وكل ما أضافه المذهب اللوجستيقي هنا هو تعبيره بثوابت المنطق أو صوره عما كان معبرا عنه فقط برموز الرياضه، في حين قد بقي تسلسل قضايا ونظريات الرياضه بعضها من بعض على النحو الذي تركه عنده المذهب الحسابي. لكن لم يكن يتيسر هذا التعبير المنطقي للرياضه إذا لم يوفق المنطق إلى تعريفاته الجميلة المتلاحقة التي بها يتمثل المنطق كل تصورات الرياضه ويذيبها فيه وعلى رأسها تعريف

العدد الذى وقفنا عنده لأهميته لأنه القنطرة التى يعبرها المنطق إلى سائر أجزاء الرياضه. ومن ثم نرى أن التعريفات اللوجستيقية وهى من عمل اللوجستيقا لا من المذهب الحسابى إنما هى الأمر الهام «علميا» فى هذه الفلسفة العلمية التى تبطن وراءها فلسفة كاملة هى أن الرياضيات من طبيعة منطقية وحسب، وليس لها مادة مستقلة عن ثوابت المنطق أو صوره .

(٢٦)

نريد أن نلقى الآن نظرة سريعة على المذهب الأكسيوماتيكي الذى هو رد فعل مباشر على المذهب اللوجستيقى من إمام الرياضه المعاصرة **بيفيد هلبيرت** الذى كان أستاذًا بجامعة برلين حتى قبيل اندلاع الحرب العالمية الثانية، وهو لا يرى أن الرياضه فرع من المنطق ومشيتقة منه كما انتهى إليه اللوجستيقيون وإنما يرى أن المنطق والرياضه نبعًا كلاهما متوازيين عن نبع واحد أسبق منهما هو الطريقة الأكسيوماتيكية (Axiomatic Method) أو كما يقال أحيانًا نبعًا عن صورية خالصة (Pure Formalism) هى الأساس المشترك والبعيد لهما معا. وليبان ذلك نقول إنه لكى تستقيم الرياضه والمنطق معا كعلمين استنباطيين (Deductive Sciences) وثيقين، يجب

الذهاب إلى ما هو أبعد من حدودهما ومسلماتها الأولية التي وصلت إليها الأبحاث السابقة عند بيان **وفريجه** وراسل، ومن مهد لهم في تحليل الرياضة والمنطق إلى حدودهما ومسلماتها الأولية من أمثال **مورتز باش** و**يديكند** وغيرهم.

وهذا الذهاب إلى ما وراء الحدود والمسلمات الأولية في المنطق والرياضة كلاهما، إنما ينتهى إلى - أو على الأصح يبدأ - من قبول حدود ومسلمات أولية أخرى عارية من كل معنى سواء في الرياضة أم في المنطق أنها مجرد رموز نضعها وضعا ومن ثم في صورة بحتة لا تتضمن معنى ما. وتلك الحدود والمسلمات التي لا هى إلى الرياضة ولا هى إلى المنطق هى التى تسمى «الأكسيوماتيك» الذى تُشتق منه بالتوازي وفى أن واحد، الرياضة والمنطق منفصلين .

ولوضع الأكسيوماتيك على طريقة **هلبرت** شروط هامة مشهورة أجملنا ذكرها فيما سبق أن قلناه عن شروط تأسيس المسلمات فى الهندسة، وهى شروط الاستقلال والإشباع وعدم التناقض التى لا تزال قيد الدراسة ولم تصل فيها الأبحاث بعد إلى قول فصل .

ولما كان الأكسيوماتيك وما يثيره من أبحاث فى شروط وضعه من الأمور التى لا تدرس فى كل من المنطق والرياضة ولا يدخل فى موضوع أى منهما، فقد اصطلح **هلبرت** على تسمية كل تلك الأبحاث

الأكسيوماتيكية بما وراء الرياضيات (Metamathematics) تارة وبما وراء المنطق (Metalogic) تارة أخرى، فتكوّن بذلك علم أو بحث جديد يجتذب الباحثين ويمهد للدراسات المنطقية والرياضية معا .

ولابد أن نلاحظ أن هذه النظرية الأكسيوماتيكية من حيث هي «صورية» تتفق - أو بتعبير أصدق - تتجاوب مع حركة عامة مضاهية لها في العلوم الطبيعية نحو تجريد أكبر وصورية متزايدة يصحبهما ليس فقط دقة في التحقق التجريبي من النظريات العلمية بل كذلك عدم معقولية متزايدة للتصورات المستعملة في العلم. فالطبيعيات الحديثة لا تميل إلى تفسير العالم ولا إلى أن تصفه، وإنما بدلا عن ذلك كله تهدف إلى استعراض بنيانه فقط (Structure) باستعمال الرموز التي لا معنى لها، أي لا تعقل وهي منفصلة بعضها عن بعض بقدر ما تعقل فقط عند الارتباط بعضها مع البعض في معادلات تبين استعمالها وبالتالي معانيها.

إن هذا الميل المتزايد من علماء الطبيعة نحو الاهتمام بالبنيان الرمزي للعلم وما تتضمنه الاقترانات المختلفة للرموز من معان، له صده أو قل له شبيهه عند هيلبرت وتلاميذه من الأكسيوماتيكيين المعاصرين الباحثين في أسس الرياضيات .

إن هذا المذهب - مذهب الصورية البحتة - هو مسألة فنية صرفة

أولا، ثم هو بعد ذلك فلسفة أن استطعنا أن نسمى فلسفة القول
المجمل بأن هناك أصلا مشتركا للمنطق والرياضة معا. أما بيان ذلك
الأصل المشترك فهو المسألة التي وصفناها بأنها فنية صرفة.
وبرنامج هذه المسألة الفنية يبدأ بإقامة نسق رمزي من الحدود
والمسلمات الأولية تشتمل على رموز للدوال الرياضية والأعداد كما
تشتمل على رموز لثوابت وقوانين من المنطق .

ويبدأ النسق بحساب للقضايا يستعمل الرموز التي عرفناها عند
راسل مع مسلمات للتضمن والوصل والفصل والنفي والمساواة
والعدد. ولقد جاء عدد تلك المسلمات كبيرا جدا بالقياس إلى مسلمات
منطق راسل التي سبق ذكرها، وسبب ذلك أن مسلمات النسق
الجديد إنما قصد بها شيء أكثر من مجرد إقامة المنطق وحده إذ
يجب أن يحسب فيها حساب الأعداد أيضا .

ويجب أن نلاحظ أن هذا المذهب أكثر صورية في الواقع من
المذهب اللوجستيقي، لأنه يبدأ من مسلمات «اسمية» بحتة، أي مجرد
رموز لا تعنى المنطق أو الرياضة. ولكنه مع ذلك لا يختلف كل
الاختلاف عن المذهب اللوجستيقي كما أراد له صاحبه هيلبرت، إذ هو
في الواقع يكمله ويزيد من دقته، لأنه لم يفعل إلا أن أوضح إمكان
الذهاب في تكوين الحدود والمسلمات الأولية إلى ما وراء المنطق. ذلك

المنطق الذى وقف عنده راسل.

هذا ثم إن الأكسيوماتيك كما نراه عند هيلبرت وتلاميذه يحتاج إلى قدر من المنطق قبل أن تستنبط منه قوانين المنطق، لأن أحد شروط تأسيسه هو أن لا تتناقض المسلمات فيما بينها، وعدم التناقض هذا من أهم قوانين المنطق. فالمنطق إذن مفروض مقدما فى كل محاولة أكسيوماتيكية من هذا النوع، ولذلك يرى المنطقيون أن هذا المذهب مكمل فقط للمذهب اللوجستيقي ومعقم له.

لكن هناك أيضا إعتراضات وجيهة على هذا المذهب يقول أحدها: إن هذا المذهب بدلا من أن يعالج مسألة عدم تناقض الرياضيات مباشرة، أعنى بدلا من معالجة نقائص الرياضة الحديثة فى نطاق الرياضة القائمة فعلا، اتجه إلى اختيار مسلمات بعيدة تنتج الرياضيات والمنطق سويا، بينما هى لا معنى لها فى ذاتها لأنها مجرد رموز خاضعة لقوانين اقتراناتها التى تحددها المسلمات. كما أن مجرد اختيارها دون غيرها تظل مسألة غيبية وربما ترجع إلى حد رياضى بعيد أملى ذلك الاختيار دون غيره فى الوقت الذى تريد فيه الصورية البحتة لكى تبرر اسمها، أن تستبعد احتمال دخول أى حدس فى الفكر الرياضى والقضاء على مجرد إمكان ظهوره.

بقى التيار الثالث المعاصر فى مشكلة أسس الرياضة وهو المذهب الحدسى (Intuitionism) أو المذهب الحدسى الجديد (Neo - Intui- tionism) الذى يعتنقه رياضيون من أمثال **برور** Brouwer و**فايل** Weyl و**هيتينج** Heyting فى ألمانيا وجيل أقدم منهم من أمثال **بوانكاريه** Poincare و**لوبيج** Lebesgue و**بير** Baire فى فرنسا، وغير هؤلاء ممن انتلفوا على معارضة المذهب اللوجستيقى وحده (مثل أولئك الرياضيين الفرنسيين الذين ذكرتهم) أو على معارضة المذهبين اللوجستيقى والأكسيوماتيكي معا (مثل هؤلاء الرياضيين الألمان الذين سبق ذكرهم) .

وهو مذهب لا يمكن إغفاله رغم أنه رياضى بحت، لأنه مذهب فريق من أجلاء الرياضيين المعاصرين، الذين يعينهم الأمر فى كل بحث يدور حول علمهم الرياضى العريق. ولأنهم يعودون بعلمهم إلى أصول غير منطقية هى الأصول التى كانت (من قبل حركة النقد الباطنى التى طردت كل حدس من الرياضة) من تقاليد الرياضة فى عصور نموها عبر القرون .

وهم فى جملتهم يعنون «بالحدس» لا البدهاة الديكارتية وإنما المعنى الكانطى للكلمة، أى تلك التجربة الحسية أو الذهنية التى

يبيحها المكان والزمان، وهى التجربة التى تقابلها وتناظرها التجربة العملية فى العلوم الطبيعية. فهم إذن رياضيون يقولون إن الرياضة لها «مادة» معينة وإذن فهى ليست صورية بحيث تشتق من المنطق الصورى، وإن تلك المادة إنما تحتاج إلى تجربة من نوع خاص هى الحدس الرياضى. ذلك الحدس التجريبي القبلى الذى هو السبيل الوحيد إلى الكشف الرياضى وإلى تأسيس الرياضة كعلم أصيل مستقل عن المنطق والأكسيوماتيك معا. وما المنطق والأكسيوماتيك فى نظر هؤلاء إلا الوسيلة العلمية اللاحقة «لاستعراض» أو «شرح» أو «بسط» تلك الكشوف والتجارب الرياضية الأصلية فى صورة واضحة يفهمها الآخرون الذين لم يكتشفوها . فهناك إذن فرق واضح بين مناهج الرياضة وبين عرض الرياضة وتقديمها إلى الآخرين. فالمنابع تجريبية أى حدسية أما العرض اللاحق للتجربة أى للحدس فهو منطقي أو أكسيوماتيكي .

هذا هو المذهب الحدسى كما يستخلص من فلسفة قدماء الحدسيين من أثنال كانط و بوانكاريه وغيرهما مما يطلق على مذاهبهم «المذهب الحدسى» وجسب.

أما المذهب الحدسى الجديد فهو مذهب المعاصرين برور وفابيل وهيتنج الذين تعمقوا فكرة الحدس الرياضى بحيث أخرجوا من

الرياضة كل ما لا ينبىء عنه ذلك الحدس، كما تجنبوا فى علمهم كل النقائض (Paradoxes) والأخطاء التى وقعت فيها الرياضة الحديثة بسبب الحدث نفسه. فأعطوا كلمة الحدس معنى خاصا وضيقا يميز مذهبهم «الحدس الجديد» عن المذهب الحدسى عامة. ومذهبهم فيه قلق مبهم، ويختلف من مؤلف إلى آخر فلا توجد له وحدة بينهم إلا فى القول الغامض بأن «الرياضة متحدة بالجزء المضبوط للفكر» (Mathematics is identical with the exact part of our thought).

وهم يقصدون بهذا أن الفكر إذا كان أحيانا «مضبوطا» بالغ الدقة فهذا هو موضوع الرياضة وموضع الحدس الرياضى. فهم إذن يواجهون الرياضة من زاوية سيكولوجية ويقربون من موقف كانط والحدسيين جملة من جهة اختلاط الرياضة بمادة فكرية ما.

وإذا كانت الرياضة عندهم هى الجزء المضبوط من الفكر فهى لا تفترض كأساس لها أى علم آخر حتى ولو كان ذلك العلم هو المنطق كما يريد اللوجستيقيون. وهؤلاء اللوجستيقيون واقعون فى خطأ الدور، حين يدعون تطبيق نظريات المنطق كوسيلة للبرهان فى الرياضة ذلك لأن تلك النظريات كما يتضح من المنطق فى صورته اللوجستيقية أو الأكسيوماتيكية هى نفسها محتاجة فى تكوينها إلى تكوين الرياضة أولا، لأنها تحتاج إلى فكرة الفئة (Class) وفكرة

الترتيب (Order) وما ينشأ عنها من تسلسل الأعداد وغير ذلك من الأفكار الرياضية. وإن إذا كانت الرياضة بهذا المعنى أولى وغير مقيدة بأى علم آخر حتى ولو كان المنطق نفسه، فلا يبقى من منبع لها غير «الحدس» الذى يقدم لنا التصورات الرياضية والاستنباطات الرياضية كأمر أصيلة مباشرة واضحة فى ذاتها. وهذا الحدس إن هو إلا المقدرة على معالجة بعض تصوراتنا واستنباطاتنا التى تحدث فى تفكيرنا العادى معالجة منفصلة (Separate) ومضبوطة (Exact) ودقيقة .

تلك الكلمات التى وصفنا بها المذهب الحدسى الجديد مقتطفة من هايتنج (A, Heyting) فى بحث له فى مجلة Erkenntnis سنة ١٩٣٢ بعنوان الأسس الحدسية للرياضة) الذى يضيف أيضا كخاصية من خواص المذهب الحدسى الجديد أن الأمور التى هى موضوع الرياضة هى أمور مستقلة عن التجربة الخارجية (الحسية) كما أنها ليست صورية بالمرّة. ولكنها مع ذلك أمور «موضوعية لا توجد مع ذلك إلا فى الفكر» .

بعد هذه اللمحة فى طبيعة هذا المذهب نلاحظ أن تطبيقه أدى بمعتنقيه إلى نتائج مؤسفة للغاية فى نظر بعض الرياضيين والفلاسفة، ووخيمة العاقبة على علم كالرياضة ذى تاريخ حافل

مجيد، فقد بدا هذا العلم منذ مجهودات المذهب الحسابى علماً
استكمل تنسيقه ووحدته. ولكن أنصار هذا المذهب الحدسى الجديد
قطّعوا أوصاله بعد تلك الوحدة التى أقامها المذهب الحسابى،
وأخرجوا الكثير من أجزائه الهامة باعتبار أنها ليست من الرياضة
فى شىء ولا ينبىء عنها الحدس، ومثال ذلك الأعداد الدائرة والأعداد
اللامتناهية وبعض الدوال التحليلية حتى نظرية المجاميع (كانتور)
التي هى أطرف وأعمق اكتشافات الرياضة فى عصورها الأخيرة لما
جاءت به من حلول عجيبة فى عمومها لمشاكل اللامتناهى التى
اصطدم بها الفكر البشرى منذ فجره. فتبقى بعد ذلك أجزاء متناثرة
لا يمكن جمعها بعضها إلى بعض فى نسق موحد لتسمى الرياضة.
ومن جهة أخرى اضطر أنصار هذا المذهب الحدسى الجديد إلى
أن يلجأوا إلى المنطق الصورى الجديد فى كل أبحاثهم بحيث يبدو
نقدهم للصلة بين الرياضة والمنطق فى مأزق لا مخرج منه، لأنهم
يرفضون المنطق كأسس من جهة، ثم هم يلجأون إليه من جهة أخرى
لإقامة نظريتهم. ولقد امتشق هيلبرت مرة أخرى قلمه ليفند طرائقهم
ونتائجهم ويردهم إلى الطريقة الأكسيوماتيكية عنده .

وهكذا نختتم مع بوانكاريه بأنه لا سبيل إلى التوفيق بين هذه
المذاهب المتصارعة الآن فوق مسرح الأبحاث الخاصة بأسس

الرياضة، لأنه لا يمكن التوفيق بين منطقيين وتجريبيين، بين نوى
العقلية الكانتورية ونوى العقلية غير الكانتورية، بين من سماهم **وليم**
جيمس نوى العقول الرقيقة ونوى العقول الخشنة.

والله أعلم،

والحمد لله رب العالمين.

مراجع مختارة

- Aristote** : Analytique seconde
- Beth, E.W.** : Les fondements de Mathematique, Louvin 1950.
- Black, M.** : The Nature of Mathematics, New York 1952.
- Brouwer, L.E.J** : Intuitionism and formalism, Bulletin of Am. Math. Soc. Vol. xx, 1913,
- Brunschvicg, L.** : Les etapes de la philos. Mathem. Paris.
- Carnap, R.** : Foundations of Logic and Mathematics, International Encyclopedia of Unified Science, 1/9 Chicago 1939.
- Chivistek, L.** : Bew foundations of Formal Mathematics, Journal of symb. Logic, 1938.
- Colerus, B.** : De Phythagore a Hilbert, Paris 1936.
- Couturat L.** :
1) L'infini mathematique, Paris 1896.
2) La logique de Loibniz d'apres des documents inedits, paris 1901 .
- Darbois** : La philosophie Mathematique de B. Russell, Paris (Alcan) .
- Gonseth, F.** : Les Fondements des Mathematiques, Paris 1926.
- Heyting, A.** : Intuitionism, An Interoduction, Amster dam, 1956.

-
- Jourdain, ph.** : Foundation of Math ., Journal of Math. 1930.
- Kleene, S.C.** : 1) A theory of positive integers in formal logic, Am. Jour. of Math, 1935.
2) Introduction to Mathematics, New York 1952.
- Nicod, J.** : A reduction in the Number of the primitive Propositions of logic, proc. Cam. Philos Soc., Vol XIX, pp. 32-41
- Peano, G.** : Formulaire de Mathematique, Turin 1893 -1908.
- Poincare, H.** : Science et Methode, Paris 1908.
- Ramsy, F.P.** : The foundation of Mathematics, Kegan Paul 1931.
- Russell, B.** : 1) Principles of Mathematics, Cambridge 1903.
2) Introduction to Math. Philosophy, London, 1919.
- Russell & Whitehead** : Principia Mathematica, 3 vols. Cambridge 1910 - 1913.
- Tannery, J.** : De la methode dans les sciences; ch. sur les math .
- Tarski, A.** : Introduction to Mathematical logic, 1938.
-

فهرس المصطلحات والأعلام

باللغات الأوروبية

A

Algebra (Algebre)	الجبر
Algebra of Logic	جبر المنطق
Algebre de logiquwe	جبر المنطق
Algorithme	لوغارتم
Analyse	التحليل (علم)
Analyse des anciens	تحليل القدماء
Analysis	مجلة
Appartanance	اشتغال، انتماء
Apriori	قبلى
Arbitraire	عسفى، تحكمى
Aritote	أرسطو
Arithmetisation of mathematics	تحسبب الرياضاة (رد الرياضاة إلى الاعداد)
Axiomatique	أكسيوماتيك، مباحث الأصول
Axiome	أصل موضوع، علوم متعارفة مسلمة
Axiome d'ordre	مسلمات أو أصول خاصة بالترتيب
Axiome de reductibilite	مسلمة الرد أو الإرجاع
Axiome de selection	مسلمة الانتقاء

B

BAIRE	بيير
BELTRAMI	بلترامى

BOLL, FERDINAND

بول (فرديناند)

BOLZANO

بولزانو

BOOLE, GEORGE

بول (جورج)

BRAHMAGUPTA

براهما جوبتا

BRUNSCHVICG

برنشفيج

C

Calcul

حساب

CANTOR

كانتور

Caracteristique universelle

أبجدية عامة

Cardinal number

عدد عاد أو أساسي

Class

طائفة أو فئة

COLERUS

كوليروس

COLLINGWOOD

كونلجود

Commutation

تبادل المواضع

Complex number

عدد مركب

COMTE

كونت

Concepts Derivés

تصورات مشتقة (بالتعريف)

Concepts Primitifs

تصورات ابتدائية

Congruence

مطابقة

Condtant

ثابت - مستمر

Construction

إنشاء ، عمل

Continu

متصل

Continuite geometrique

اتصال هندسي

Continouus deformation

تشويه مستمر

CVontinuum

اتصال

Convergente

متجمع

Coordinates	الإحداثيان
Courbe	منحنى الدالة
COUTURAT	كوتوراه
CROCE	كروتشي
Curve	منحنى الدالة

D

D'ALEMBERT	دالامبير
DEDEKIND	ديدكند
Deductive science	علم استنباطي
Deductive system	نسق استنباطي
Definition by abstraction	تعريف بالتجريد
DEmonstrative science	علم برهاني
Deplacement	نقطة
DESCARTES	ديكارت
Differentiation	تفاضل (حساب)
DILTEY	دلتي
DIOPHANTE	ديوفانت
Dirichelet, Lejeune	ديرشليه (لوجين)
Discontinuous function	انفصال
Doctrine arithmetisante	المذهب الحسابي
DRYFUS	ديرفوس
DURKHEIM	دوركيم

E

Elementary calculus of propositions	حساب القضايا الأولية
Elements	الأصول

Enonce	منطوق
ENTIQUES	إنريكس
Entier	العدد الصحيح
Equality	مساواة
Equivalence	معادلة
Erkenntnis	مجلة علمية
EUCLIDE	أقليدس

F

Finite number	العدد المنتهى
Fonction	دالة
Fonction analytique	دالة تحليلية
Formal	صوري
Formalism	صورية
Foundation of mathematics	أسس الرياضيات، أصولها
Function	دالة

G

GAUSS	جوس
Geometrie analytique	هندسة تحليلية
Geometry of situation	هندسة الوضع
GOBLOT	جوبلو
GRASSMANN	جراسمان

H

HADAMARD	هادامار
HAEKEL	هاينكل

HALSTED	هالشتد
HAMILTON, ROWAN	هاملتون (روان)
HANTIGTON	هنتجتون
HAUSSDORFF	هاوسدورف
HEGEL	هيجل
HERMITE	هرميت
HILBERT	هلبيرت
Homogene	متجانس
Hypothese	فرض

I

Indentite	ذاتية ، هوية
Imaginary number	عدد تخيلي
Implication	تضمن
Inclusion	احتواء
Incommensurables	الأعداد أو الأبعاد غير المتقايضة
Independence	استقلال
independence ordonnee	استقلال مرتب
Induction mathematique	استقراء رياضي
Induction par recurrence	استقراء بالتكرار
Infini	لامتناه
Infinite number	عدد غير متناه
Integer	عدد صحيح
Integration	تكامل (حساب)
Intuition	حدس، بدهة
Intuition empirique	حدس تجريبي
Intuition spacieale	حدس مكاني
Intuitionism	المذهب الحدسي

Irrational number

العدد الأصم

Isomorphe

لا كيف له

J

JAMES, W.

جيمس (وليم)

JEVONS

جيفنز

JOURADIN, ph

جوردين (فيليب)

K

KANT

كانط

KLEENE

كلين

KLEIN, F.

كلارين (فيلكس)

KONIG

كونج

KRONECKER

كرونكر

L

LAGRANGE

لاجرانج

LALANDE

لالاند

LANDEAU

لانديو

Law of association

قانون الاشتراك أو الاقتران

Law of distribution

قانون التوزيع

Law of duality

قانون الثنائية

LEBESGUE

لوبيج

LEGENDRE

لوجاندر

Relation

علاقة

LEVI, Beppo

ليفى (بيو)

Limite

حد

LOBATCHEVSKI

لوباتشفسكى

localisation

تعيين المكان

logistic

لوجستيقا أو المنطق الرياضى

Logistic theory

المذهب أو النظرية اللوجستيقية

Logistica numerosa

حساب الأعداد

Logistica speciosa

حساب الحروف (الجبر)

Logistique

لوجستيقا

M

MARX

ماركس

Mathematical logic

المنطق الرياضى

Mathematique universelle

الرياضة العامة

MAUSS

موس

MENON

مينون

MERAY

ميراي

Mesure

قياس

Metalogic

ما وراء المنطق

Metamathematics

ما وراء الرياضة

Metrical geometry

هندسة قياسية

Methode genetique

طريقة تكوينية أو توليدية

Methodology

علم مناهج العلوم

MOKDERUP

مولدروب

N

NEWTON

نيوتن

NICOD

نيكود

Nominalists

اسميون

Non - euclidian geometries

هندسات غير أقليدية

Non-metrical geometries

هندسات غير قياسية

Neo - Intuitionism

المذهب الحدسي الجديد

O

Order

نظام، ترتيب

Ordinal

عدد مرتب

Ordre

نظام، ترتيب

P

PADOA

بادوا

PADCH

باش

PEANO

بيانو

PEIRCE, CH. S.

بيرس (شارل ساندرس)

Permutation

تبادل المواضع

PIERI

بييري

PLATON

أفلاطون

Philosophy of natural sciences

فلسفج العلوم الطبيعية

philosophy of physical sciences

فلسفة علوم الطبيعة

Philosophy of sciences

فلسفة العلوم

PHYTAGORE

فيثاغور

POINCARÉ

بوانكاريه

Postulat

مسلمة ، مصادرة

Postulat implicit

مسلمة مضمرة

Postulational system

نسق المسلمات

Projective geometry

هندسة إسقاطية

Projective transformation

تحويل إسقاطي

Proposition	قضیة
Powers	قوى ، أسس
Puissances	قوى ، أسس
Pure Formalism	صورية بحتة أو خالصة

Q

Qualitative geometry	هندسة كيفية
Quantite impossible	كم مستحيل
Quaternions	الأعداد الرباعية

R

Reflexion	انعكاس
RHIND	رند
REIMANN	ريمان
RENAN	رينان
Rotation	استدارة، دوران
RUSSELL	راسل

S

SACCHERI	ساكيري
SCHRODER	شرويدر
Signs	علامات
Space	مكان
Symbolic	رمزى
Symbolic logic	منطقي رمزى
Synthese	تركيب
Systeme categorico - deductif	نسق يقينى استنباطى

Systeme hypothetico - deductif	نسق فرضي استنباطي
TANNERY, J.	تانري
TAURINAUS	تورينوس
Tautology	توتولوجيا (قانون اللغو)
Theoreme	نظرية
Theoria	مجلة
Theori des ensembles	نظرية المجاميع
Theory of cut	نظرية القطع
Theory of Functions	نظرية الدوال
Theory of groups	نظرية المجموعات
Theory of Limit	نظرية الحد
Theory of set	نظرية المجاميع
Time	الزمان
Transfinite number	العدد غير المتناهي، اللامتناه
Transformation	تحويل

V

VAILATI	فيلاتي
VARIABLE	متغير
Variante	متغير
Vecteur Libre	متجه حر
VELBEN	فلبن
VENN	فين
Verite Externe	حقيقة خارجية
Verite interne	حقيقة باطنة
VIETE	فيت

W

WEBER

فببر

WEIERSTRASS

فبرستراس

WELSTEIN

فلشتين

WEYL

فايل

Z

ZENON

زينون

ZEUTHAN

تزيتن

المحتويات

٥	* تصدير
٨	* ثابت الفندى.. مسيرة حياة وفكر
٢٩	* مقدمة الكتاب (للمؤلف)
٣١	الفصل الأول : تمهيد في فلسفة العلوم
٣٣	(١) الصلة بين العلوم والفلسفة
٣٥	(٢) حركات النقد الذاتى فى العلوم وفلسفة العلوم
٤٣	(٣) المنهج الذي اتبعناه في عرض فلسفة الرياضة
	الفصل الثانى : موضوعات الرياضة
٥١	ونشأتها عند الإنسان وتاريخها قديما
٥٣	(٤) التعريف التقليدى للرياضة بموضوعاتها
	(٥) الأصول الفزيولوجية والاجتماعية لفكرتى المكان والعدد
٥٥	أو للهندسة والحساب
٦١	(٦) نشأة الرياضيات كعلم عند اليونانيين
	الفصل الثالث : تعاون بين الفلسفة والرياضة منذ القدم
٧٣	فى سبيل تأسيس علم رياضى وثيق
٧٥	(٧) لابديل للرياضة عن منهجها

-
- (٨) تعريف الرياضة بمنهجها ٧٨
- (٩) تحليل ارسطو لأسس الهندسة وتطبيق اقليدس
لهذا التحليل فى إقامة نسق استنباطى للهندسة ٨٠
- الفصل الرابع: من النقد الداخلى فى الهندسة**
- إلى الأكسيوماتيك الحديث** ٩٣
- (١٠) حركة النقد الذاتى فى الهندسة
ونشأة هندسات كثيرة فى القرن التاسع عشر ٩٥
- (١١) معنى الحقيقة الرياضية الجديد ضد نظرية
كانط فى أسس الرياضة ١٠٨
- (١٢) حركة تأسيس المسلمات فى الهندسة (الأكسيوماتيك)
تبتعد عن الحدس وتلتقى بالمنطق الصورى ١١٣
- (١٣) اقتراح لهنرى بوانكاريه يؤكد مدى ابتعاد
مسلمات الهندسة عن الحدوس والأشكال ١٢٣
- (١٤) الشروط المنطقية لتأسيس المسلمات
عند الرياضيين المعاصرين ١٢٥
- الفصل الخامس: تحسبب الرياضة وأكسيوماتيك العدد** ١٣٥
- (١٥) الجبر والهندسة التحليلية ١٣٧
- (١٦) النقد الباطنى فى التحليل ينتهى إلى نبذ فكرة الاتصال
-

الهندسى ويستعيز عنها بالأعداد	١٤٧
(١٧) دور الأعداد التخيلية فى تحسيب الرياضة.....	١٥٢
(١٨) برنامج المذهب الحسابى ومثال رد الأعداد	
التخيلية إلى الأعداد الصحيحة	١٥٦
(١٩) رد الأعداد الصماء إلى الأعداد الصحيحة	١٦٥
(٢٠) نظرية الأعداد اللامنتهية دعم للمذهب الحسابى	١٧٣
(٢١) أكسيوماتيك العدد.....	١٨٢
الفصل السادس: المذاهب المعاصرة فى أسس الرياضة.....	١٩١
(٢٢) معنى المذهب اللوجستيقى.....	١٩٣
(٢٣) معالم تاريخ المنطق الرياضى	١٩٧
(٢٤) عرض لحساب القضايا الأولية فى اللوجستيقيا	٢٠٧
(٢٥) اشتقاق العدد أو نظرية الحساب من ثوابت المنطق.....	٢١٨
(٢٦) المذهب الأكسيوماتيكي	٢٣٥
(٢٧) المذهب الحدسى والمذهب الحدسى الجديد.....	٢٤٠
- مراجع مختارة.....	٢٤٦
- فهرس المصطلحات والاعلام باللغات الأوروبية.....	٢٤٨
- المحتويات	٢٥٩

الكتاب القادم

حي بن يقظان

(أربع صياغات تراثية)

د. يوسف زيدان

رقم الإيداع : ٥٥٠١ / ٩٧

الترقيم الدولي : 977- 235-818-2

شركة الأمل للطباعة والنشر
ن : ٣٩٠٤٠٩٦



الهيئة العامة
لتحسين الثقافة

5

أسس الرياضة أو فلسفتها، اصطلاحان لموضوع واحد شغل الفكر الغربي طويلاً، في حين استطاع ثابت الفندي أن يضعه لنا بدقة، كنموذج فكري أصيل يتناول العديد من المشكلات المتعلقة بالرياضيات حيث صدر هذا الكتاب في الأربعينيات، كأول مرجع لهذا التخصص بالعربية يستخدم في أوروبا، في الوقت الذي عانت فيه الأطروحات الغربية المقدمة في هذا المجال، من السطحية والتعقيد الفني. وفي إطار فلسفي واضح يقدم الفندي هذا الكتاب بهدف البحث في قضية فلسفة الرياضيات، اعتماداً على انعدام فكرة النظرية المثالية في أصول الرياضة.



الفلسفة والعلم